



Introduction to Local Euler Obstruction: From Platonic Solids to Determinantal Varieties

Introdução à Obstrução de Euler Local: dos sólidos platônicos às variedades determinantis *

Raphael de Omena ¹

¹Departamento de Matemática – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE – Brasil

raphael.marinho@mat.ufc.br

Abstract. *The local Euler obstruction was initially defined by MacPherson to address the Deligne and Grothendieck conjecture regarding the existence and uniqueness of Chern classes for singular algebraic varieties. In the context of indices of vector fields, Brasselet and Schwartz characterized this invariant, an approach we will follow in this text. Based on this definition, we also present the Euler obstruction of a function and the Euler obstruction of a map.*

Keywords – obstruction theory, singular variety, vector field, index

MSC2020 – 58K45, 32S50, 14B05, 14M12

Resumo. *A obstrução de Euler local foi inicialmente definida por MacPherson para responder à conjectura de Deligne e Grothendieck sobre a existência e unicidade das classes de Chern para variedades algébricas singulares. No contexto de índices de campos vetoriais, Brasselet e Schwartz caracterizaram esse invariante, abordagem que seguiremos neste texto. Com base nessa definição, também apresentamos a obstrução de Euler local de uma função e a obstrução de Euler local de uma aplicação.*

Palavras-chave – teoria de obstrução, variedade singular, campo vetorial, índice

1. Introdução

Na matemática, um dos principais objetivos é encontrar maneiras de distinguir objetos por meio de suas propriedades geométricas, topológicas e/ou algébricas. Na Teoria de Singularidades, temos alguns invariantes importantes que nos fornecem esse tipo de informação.

*Received 10 February 2025; Revised form 28 November 2025; Accepted 1 December 2025. Available online 5 December 2025





No contexto de campos vetoriais, o índice de Poincaré-Hopf é um dos invariantes em destaque. Para entender sua importância, retornamos ao século XVI, com os sólidos platônicos e a relação $V - A + F = 2$, que é generalizada como a característica de Euler-Poincaré. Essa relação foi conectada por Poincaré à topologia de uma superfície compacta, fornecendo a primeira medida de obstrução para a construção de um campo vetorial contínuo sobre uma variedade suave compacta.

A Teoria de Obstrução, de forma geral, lida com problemas de extensão e levantamento de aplicações que preservam certas propriedades. Nesta discussão, focamos na obstrução para construir r -campos vetoriais sobre uma variedade e avaliamos tal obstrução. Quando estamos no contexto de variedades suaves, a teoria de obstrução utiliza os fibrados tangentes para construir as classes características, que são elementos de grupos de cohomologia.

Quando lidamos com variedades singulares, não há espaços tangentes bem definidos em todos os pontos da variedade. O primeiro passo é encontrar um substituto para desenvolver uma teoria similar de obstrução. Uma contribuição significativa nessa direção é o trabalho de MacPherson [1], que utiliza o Fibrado de Nash para desenvolver a teoria culminando nas classes de Chern para variedades algébricas singulares.

Além do Fibrado de Nash, MacPherson define e utiliza a obstrução de Euler local para a construção das classes características. Esta obstrução local generaliza o conceito de característica de Euler-Poincaré, sendo definida no contexto de formas diferenciais através da diferencial da função distância.

Embora MacPherson tenha sido o primeiro a responder à conjectura de Deligne e Grothendieck sobre a existência e unicidade das classes de Chern para variedades algébricas singulares, a matemática francesa Schwartz [2], cerca de uma década antes, construiu uma classe característica em homologia, que seria o dual, pela dualidade de Alexander, da classe definida por MacPherson. Para provar essa dualidade, Brasselet e Schwartz [3] caracterizam a obstrução de Euler local usando uma construção com campos vetoriais radiais, reconectando ao contexto dos índices de campos vetoriais.

Em resumo, a obstrução de Euler local (definição 3.6) é um número inteiro dado como a avaliação do cociclo de obstrução (para estender continuamente um campo no fibrado de Nash) na classe fundamental da vizinhança do ponto estudado. Quando associamos esse conceito ao gradiente de uma função holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ com singularidade isolada, temos a noção da obstrução de Euler local da função f (definição 3.12). Ao estudarmos r -campos vetoriais, tal construção nos leva à obstrução de Euler local do r -campo. Grulha, em sua tese de doutorado [4], define a obstrução de Euler local de uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{C}^r$ a partir dos campos gradientes de cada função coordenada.

Apesar de sua interpretação geométrica significativa, a obstrução de Euler local é, em





geral, difícil de calcular. Por isso, vários autores têm investigado fórmulas que facilitem esse entendimento, como as apresentadas nos Teoremas 3.10 e 3.13 sobre a obstrução de Euler local e a obstrução de uma função.

No caso da obstrução de uma aplicação, apresentamos o Teorema 4.12, que relaciona essa obstrução a outros invariantes definidos em singularidades determinantis. As singularidades determinantis generalizam o conceito de singularidades de interseção completa. Em termos simples, uma variedade determinantal é definida como a pré-imagem de um conjunto de matrizes $m \times n$ cujo posto é limitado por um $t \leq \min(m, n)$ fixo. O estudo dessas singularidades tem despertado grande interesse entre geômetras algébricos e especialistas em teoria das singularidades.

Este texto está organizado em três seções principais. Na seção 2, intitulada “Teoria de Obstrução”, introduzimos os conceitos necessários para compreender o principal objeto de estudo deste texto. Além disso, revisamos o contexto histórico que fundamenta a problemática abordada e oferecemos referências adicionais, como [5, 6], para aqueles que desejam se aprofundar.

A seção 3 é dedicada à definição da obstrução de Euler local, à obstrução de uma função e à obstrução de uma aplicação. Apresentamos fórmulas que facilitam o cálculo desses invariantes e revisamos dois outros invariantes relacionados ao mesmo contexto de obstrução: o defeito de Euler e o número de Brasselet.

Por fim, na seção 4, introduzimos as variedades determinantis genéricas e as variedades determinantis, apresentando suas definições e alguns exemplos ilustrativos. Também reunimos resultados relevantes sobre a obstrução de Euler local no contexto determinantal, destacando o Teorema 4.12, que fornece caracterizações para a obstrução de uma aplicação em termos de outros invariantes estudados na teoria das singularidades.

2. Teoria de Obstrução

Nesta seção, relembremos o conceito de característica de Euler-Poincaré, que virá a ser uma medida de obstrução para construir campos vetoriais contínuos sem singularidades sobre variedades suaves, de acordo com o Teorema de Poincaré-Hopf.

Em um contexto mais geral, a teoria da obstrução busca estabelecer invariantes que sirvam como uma medida da obstrução à construção de seções linearmente independentes de um fibrado vetorial. Esta busca nos leva ao cociclo de obstrução, apresentado no decorrer desta seção.

2.1. Uma Medida de Obstrução para Variedades Suaves

Uma exploração histórica conduzida por Brasselet em [5] confirma que o padre-matemático Maurolico (1537) observou em um manuscrito não publicado que, ao considerar um sólido platônico P com V vértices, A arestas e F faces, a relação $V - A + F = 2$ é válida.





Por volta de 1750, Euler tenta classificar os poliedros convexos no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , primeiramente de acordo com o número de faces. Em seguida, ele os classificava pelo número de vértices. Ao tentar distinguir os poliedros com o mesmo número de faces e vértices pelo número de arestas, descobriu que era impossível fazer isso, pois o número de arestas era o mesmo. É assim que Euler redescobriu a mesma fórmula para um poliedro convexo P .

Com o desenvolvimento da matemática, principalmente dos conceitos de Topologia Algébrica, Poincaré estendeu este resultado em 1893 para poliedros finitos P de dimensões superiores e estabeleceu o famoso Teorema de Poincaré-Hopf. Para entender essa abordagem, apresentamos alguns conceitos.

Definição 2.1. Um **complexo simplicial** (finito) K é uma coleção de simplexes em algum espaço euclidiano tal que:

1. Se $\sigma \in K$, então toda face de σ pertence a K .
2. Se $\sigma, \tau \in K$, então $\sigma \cap \tau$ é vazio ou é uma face comum de σ e τ .

Se K é um complexo simplicial (finito) em \mathbb{R}^n , então a união dos simplexes em K é um subespaço compacto de \mathbb{R}^n , denotado por $|K|$ e chamado de realização geométrica de K .

Definição 2.2. Seja k_i o número de i -simplexes de um poliedro finito n -dimensional P em \mathbb{R}^m . A **característica de Euler-Poincaré** do poliedro P é definida como:

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^n (-1)^i k_i.$$

Definição 2.3. Um espaço topológico X é **triangulável** se existir um complexo simplicial K e um homeomorfismo $h : |K| \rightarrow X$. O complexo simplicial K é chamado de triangulação de X .

Teorema 2.4 (Poincaré). *Se K_1 e K_2 são duas triangulações de um espaço topológico X , então $\chi(K_1) = \chi(K_2)$.*

Este teorema permite a definição da **Característica de Euler-Poincaré** de um espaço triangulável X como $\chi(X) := \chi(K)$, onde K é qualquer triangulação de X .

Exemplo 2.5. Considerando que $\chi(P) = V - A + F = 2$ para um poliedro convexo P e observando que a esfera \mathbb{S}^2 é homeomorfa a um poliedro convexo, como o cubo ou o tetraedro, segue que $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$.

Há outra abordagem importante para calcular a característica de Euler-Poincaré de um espaço topológico, usando os números de Betti. Dado um poliedro finito n -dimensional P em \mathbb{R}^m , definimos o i -ésimo número de Betti de P por

$$b_i(P) := \text{rank}(H_i(P, \mathbb{Z})) = \text{rank}(F_i(P)),$$





onde $F_i(P)$ é o subgrupo livre do i -ésimo grupo de homologia $H_i(P, \mathbb{Z})$.

Se $i > \dim(P) = n$, então $b_i(P) = 0$, e temos a seguinte igualdade provada por Poincaré. Este resultado pode ser encontrado como Teorema 22.2 em [7].

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(P).$$

Em 1915, Alexander anunciou que duas triangulações do mesmo espaço topológico têm os mesmos números de Betti [8]. Portanto, o número de Betti $b_i(X)$ de um espaço triangulável X pode ser definido como $b_i(K)$ para qualquer triangulação K de X , e a equação acima se aplica a espaços trianguláveis.

Exemplo 2.6. Para uma superfície orientável (conexa) X de gênero g , temos $b_0(X) = 1$, $b_1(X) = 2g$ e $b_2(X) = 1$ (veja Exemplo 2.36 em [9]). Assim, a característica de Euler-Poincaré é $\chi(X) = 2 - 2g$, revelando que qualquer superfície compacta orientável (sem bordo) é topologicamente equivalente a uma esfera com g alças adicionadas.

2.2. O Teorema de Poincaré-Hopf

O Teorema de Poincaré-Hopf revela uma conexão entre topologia e geometria diferencial. Essencialmente, significa que a característica de Euler-Poincaré serve como uma *medida de obstrução* à construção de um campo vetorial contínuo tangente à variedade dada sem singularidades.

Seja M uma variedade suave, orientável e de dimensão n . Considere um campo vetorial contínuo v definido em uma vizinhança de um ponto $p \in M$ com uma singularidade isolada em p . Isso implica que v é uma seção do fibrado tangente de M , sendo nulo em p ou não sendo definido em p .

Seja $B(p)$ uma pequena bola tal que p é a única singularidade de v dentro de $B(p)$. Neste caso, o campo v é bem definido e sem singularidades em $S(p) = \partial B(p)$. Mantemos a mesma orientação de M em $S(p) \cong \mathbb{S}^{n-1}$ e introduzimos a aplicação de Gauss

$$\begin{aligned} \gamma : S(p) \cong \mathbb{S}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x &\longmapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}. \end{aligned}$$

Geometricamente, o grau de γ representa o número de vezes que $\gamma(S(p))$ cobre \mathbb{S}^{n-1} . Em outras palavras, é o grau da aplicação

$$\gamma_* : H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}.$$





Esse grau é denotado por $I(v, p)$ e é chamado de **Índice** de v em p . Usando a técnica da extensão radial, os autores de [10] demonstram o Teorema de Poincaré–Hopf, que enunciamos a seguir, para qualquer campo vetorial com singularidades isoladas e índice arbitrário.

Teorema 2.7 (Poincaré–Hopf). *Seja M uma variedade suave, fechada e orientada. Seja v um campo vetorial contínuo em M com um número finito de singularidades isoladas $p_i \in M$. Então,*

$$\chi(M) = \sum I(v, p_i).$$

Portanto, a soma dos índices de um campo vetorial com singularidades isoladas, sobre uma variedade suave, fechada e orientada, não depende do campo vetorial específico. A principal consequência dessa observação é o seguinte resultado.

Corolário 2.8. *Para uma variedade suave, fechada e orientada M , se $\chi(M) \neq 0$, então qualquer campo vetorial contínuo tangente a M possui pelo menos um ponto singular. Por outro lado, toda variedade suave, fechada e orientada com $\chi(M) = 0$ admite um campo vetorial contínuo tangente sem singularidades.*

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [5].

Exemplo 2.9. No Exemplo 2.5, vimos que $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$. Um corolário do Teorema de Poincaré–Hopf é conhecido como o *Teorema da Bola Cabeluda*, encapsulado pela frase “não podemos pentear uma bola cabeluda sem criar um redemoinho”, já que um campo contínuo sobre a esfera deverá ter singularidades. Além disso, a fórmula geral $\chi(\mathbb{S}^n) = 1 + (-1)^n$ implica que o teorema se mantém para n -esferas de dimensões pares.

Por outro lado, o Exemplo 2.6 implica que $\chi(T^2) = 0$, onde T^2 é o toro bidimensional. Consequentemente, qualquer campo vetorial sobre T^2 admite uma perturbação sem singularidades.

2.3. O Cociclo de Obstrução

Na topologia algébrica, frequentemente lidamos com problemas relacionados à extensão e ao levantamento de aplicações, de modo que preservem certas propriedades estabelecidas. Nesse contexto, a teoria de obstrução fornece ferramentas fundamentais para solucionar tais questões. Para uma introdução mais ampla ao tema, recomendamos [6].

Neste trabalho, concentraremos nossa atenção em aplicações que surgem como seções de um fibrado localmente trivial, começando pelo caso mais conhecido: o fibrado tangente sobre uma variedade suave. Para isso, seguiremos a abordagem de [5].

Seja M uma variedade complexa suave de dimensão n , com uma métrica hermitiana. O fibrado tangente de M , denotado por TM , é um fibrado vetorial sobre M de posto n , com fibras dadas pelos espaços tangentes $T_x M$ em cada ponto $x \in M$. Sabemos que TM é um fibrado localmente trivial, o que significa que existe uma cobertura aberta $\{U_i\}$ de M tal que a restrição $TM|_{U_i}$ é isomorfa a $U_i \times \mathbb{C}^n$.



Definição 2.10. Um r -campo vetorial em um subconjunto $A \subset M$ de uma variedade M é um conjunto $v^{(r)} = (v_1, \dots, v_r)$ de r campos vetoriais tangentes a M , definidos em A . Um **ponto singular** de $v^{(r)}$ é um ponto x tal que $\{v_1(x), \dots, v_r(x)\}$ não é linearmente independente. Um r -campo vetorial não singular é chamado de r -referencial.

Exemplo 2.11. A **variedade de Stiefel** $V_r(\mathbb{C}^n)$ é o conjunto de r -referenciais em \mathbb{C}^n . Construimos o fibrado $V_r(TM) \rightarrow M$ dos r -referenciais tangentes a variedade n -dimensional M , *i.e.*, o conjunto dos pares $(x, (v_1, \dots, v_r))$ em que $x \in M$ e (v_1, \dots, v_r) é um r -referencial em $T_x M$.

Em outras palavras, a fibra sobre x é a variedade $V_r(T_x M)$. A fibra típica é a variedade de Stiefel $V_r(\mathbb{C}^n)$. Notamos ainda que um r -referencial sobre M é uma seção do fibrado $V_r(TM) \rightarrow M$.

Os grupos de homotopia da variedade de Stiefel foram calculados por Stiefel e Whitney:

$$\pi_i(V_r(\mathbb{C}^n)) = \begin{cases} 0, & \text{se } i < 2n - 2r + 1 \\ \mathbb{Z}, & \text{se } i = 2n - 2r + 1 \end{cases}$$

Agora, considere uma triangulação K de M , suficientemente fina para que cada simplexo σ esteja contida em algum subconjunto aberto $U \subset M$, onde $V_r(TM)|_U$ é trivial.

Suponha que temos uma seção $v^{(r)}$ de $V_r(TM)$ definida no bordo $\partial\sigma$ de um k -simplexo σ . A questão-chave é: *essa seção pode ser estendida para o interior de σ* ? Em caso negativo, como podemos avaliar as obstruções que impedem tal extensão?

A seção $v^{(r)}$ sobre o bordo de σ define uma aplicação

$$\partial\sigma \xrightarrow{v^{(r)}} V_r(TM)|_U \cong U \times V_r(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{p_2} V_r(\mathbb{C}^n),$$

e assim obtemos uma aplicação $\mathbb{S}^{k-1} \cong \partial\sigma \rightarrow V_r(\mathbb{C}^n)$. A partir dessa aplicação, temos um elemento $[\xi(v^{(r)}, \sigma)]$ de $\pi_{k-1}(V_r(\mathbb{C}^n))$.

Suponha que $[\xi(v^{(r)}, \sigma)] = 0$. Neste caso, o r -campo $v^{(r)}$ pode ser estendido para o interior do simplexo σ sem singularidades, ou seja, não há obstrução. Isto ocorre, por exemplo, no caso em que $\pi_{k-1}(V_r(\mathbb{C}^n)) = 0$. Utilizando os cálculos de Stiefel e Whitney apresentados no Exemplo 2.11, temos:

Proposição 2.12 (Proposição 3.1.7, [5]). *Seja um r -campo $v^{(r)}$ definido no bordo $\partial\sigma$ de um k -simplexo σ . Temos:*

- i) Se $k < 2(n - r + 1)$, então $[\xi(v^{(r)}, \sigma)] = 0$ e $v^{(r)}$ pode ser estendido para o interior de σ , sem singularidades.*
- ii) Se $k = 2(n - r + 1)$, então $v^{(r)}$ pode ser estendido para o interior de σ com uma singularidade isolada no baricentro \hat{o} .*





No caso em que $[\xi(v^{(r)}, \sigma)] \in \mathbb{Z}$, obtemos um índice, denotado por $I(v^{(r)}, \hat{\sigma})$. Esse índice mede a obstrução de estender o r -campo do bordo para o interior de σ .

Dado um complexo simplicial K e um subcomplexo L , sejam $X = |K|$ e $Y = |L|$ suas realizações geométricas. O k -esqueleto de K , que consiste de todos os simplexes de dimensão menor ou igual a k , será denotado por $X_k = |K^k|$.

Considere um fibrado E com base X e fibra F . Nosso objetivo é resolver o problema de estender uma aplicação $f : Y \rightarrow F$ para todo o espaço X , por meio de extensões sucessivas de X_{k-1} para X_k .

Assuma que a aplicação f esteja definida em X_{k-1} , e denote-a por $f_{k-1} : X_{k-1} \rightarrow F$. Quando σ é um k -simplexo orientado, f_{k-1} é bem definida no bordo $\partial\sigma$. Consequentemente, ela determina um elemento da forma $[f_{k-1}|_{\partial\sigma}] \in \pi_{k-1}(F)$, onde $[f_{k-1}|_{\partial\sigma}]$ representa a classe de homotopia da restrição de f_{k-1} ao bordo $\partial\sigma$.

Definição 2.13. A cocadeia denotada por $c(f_{k-1}) \in C^k(K, L, \pi_{k-1}(F))$ e definida por

$$\langle c(f_{k-1}), \sigma \rangle = [f_{k-1}|_{\partial\sigma}] \in \pi_{k-1}(F)$$

é um cociclo, chamado de **cociclo de obstrução**.

Teorema 2.14 (Corolário 7.2.5, [6]). *A aplicação f_{k-1} admite uma extensão para $f_k : X_k \rightarrow F$ se, e somente se, o cociclo de obstrução $c(f_{k-1})$ for nulo.*

Assim, um cociclo de obstrução é um elemento de um grupo de cohomologia associado a uma *classe de obstrução* que detecta a impossibilidade de estender uma seção do fibrado para um conjunto maior. Se o cociclo de obstrução é trivial (ou seja, representa o elemento neutro no grupo de cohomologia), então a extensão é possível; caso contrário, há uma obstrução.

3. A Obstrução de Euler Local

A existência e unicidade da classe de Chern para variedades algébricas singulares foi conjecturada por Deligne e Grothendieck, sendo provada por MacPherson em [1]. Em sua construção, MacPherson introduz a obstrução de Euler local como um dos principais ingredientes das classes características para variedades singulares.

A conjectura de Deligne e Grothendieck foi formulada por volta de 1969, e Sullivan publica tal discussão na seção “notas históricas” do artigo [11]. Antes mesmo de a conjectura ser conhecida, Schwartz [2] já a havia respondido com sua construção de campos radiais. De fato, juntamente com Brasselet em [3], eles provam que a classe de MacPherson é equivalente à classe de Schwartz, via a dualidade de Alexander.

Para provar a equivalência, Brasselet e Schwartz também introduzem a noção de obstrução de Euler local. Enquanto MacPherson usa formas diferenciais para definir tal obstrução, Brasselet





e Schwartz [3] utilizam campos radiais estratificados. Nesta seção, seguimos as ideias de Brasselet e Schwartz.

3.1. O Fibrado de Nash

Na presença de singularidades em uma variedade, o conceito de espaço tangente em pontos singulares não é bem definido. Portanto, nossa prioridade é identificar alternativas ao fibrado tangente e utilizar a teoria de obstrução para esses fibrados alternativos.

Uma abordagem construtiva envolve a estratificação da variedade singular em subvariedades suaves. Seja X uma variedade analítica singular, equipada com uma estratificação e imersa em uma variedade analítica suave M . Podemos considerar a união dos fibrados tangentes das estratificações, formando um subespaço $E \subset TM$ dentro do fibrado tangente de M .

Embora E não seja propriamente um fibrado, ele estende significativamente a noção de fibrado tangente. Mais precisamente, uma seção de E sobre X é uma seção v de $TM|_X$ tal que, em cada ponto $x \in X$, o vetor $v(x)$ pertence ao espaço tangente da estratificação que contém x . Tal seção é chamada de campo vetorial estratificado sobre X . Em 1965, Schwartz [2] propôs E como um substituto para o fibrado tangente de X e utilizou a teoria de obstrução para variedades analíticas para definir a Classe de Schwartz. A p -ésima Classe de Schwartz de X é representada por $c^p(X) \in H^{2p}(M, M \setminus X, \mathbb{Z})$. Os detalhes da construção da Classe de Schwartz podem ser encontrados em [12].

Outra alternativa ao fibrado tangente é o fibrado de Nash, que é construído da seguinte forma. Considere uma variedade complexa analítica n -equidimensional X imersa em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{C}^m$. Seja X_{sing} a parte singular de X , e seja $X_{reg} = X \setminus X_{sing}$ sua parte regular. Denotamos a variedade Grassmanniana de n -planos complexos em \mathbb{C}^m por $Gr(n, m)$.

Na parte regular de X , a aplicação de Gauss é definida como:

$$\begin{aligned} \phi : X_{reg} &\longrightarrow U \times Gr(n, m) \\ x &\longmapsto (x, T_x X_{reg}) \end{aligned}$$

Definição 3.1. O fecho da imagem da aplicação de Gauss ϕ em $U \times Gr(n, m)$, denotado por $Nash(X)$, é a **Transformação de Nash** de X .

$Nash(X)$ é um espaço analítico complexo equipado com uma projeção holomorfa $\nu : Nash(X) \rightarrow X$. Embora nem sempre seja suave, é possível definir um fibrado sobre a





transformação de Nash.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Nash}(\mathcal{T}) & \longrightarrow & \mathcal{T} \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Nash}(X) & \longrightarrow & U \times \text{Gr}(n, m) \\
 \nu \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 X & \longrightarrow & U \subseteq \mathbb{C}^m
 \end{array}$$

Seja \mathcal{T} a extensão do fibrado tautológico de $\text{Gr}(n, m)$ sobre $U \times \text{Gr}(n, m)$. Considerando $\text{Nash}(X) \subset U \times \text{Gr}(n, m)$, definimos $\text{Nash}(\mathcal{T})$ como a restrição de \mathcal{T} a $\text{Nash}(X)$, denominado **fibrado de Nash**. A projeção desse fibrado é denotada por $\pi : \text{Nash}(\mathcal{T}) \rightarrow \text{Nash}(X)$. Um elemento de $\text{Nash}(\mathcal{T})$ é representado como (x, P, v) , onde $x \in U$, P é um n -plano em \mathbb{C}^m com base em x , e v é um vetor em P .

É utilizando o Fibrado de Nash que MacPherson [1], em 1974, respondeu à conjectura de Deligne e Grothendieck sobre a existência e unicidade de classes características para variedades singulares. Em 1981, Brasselet e Schwartz provaram que a Classe de MacPherson é a imagem da Classe de Schwartz sob o Isomorfismo da Dualidade de Alexander. Para uma exposição detalhada sobre dualidade entre homologia e cohomologia, ver o Capítulo 8 de [7]. Desde então, essa classe passou a ser conhecida como Classe de Schwartz-MacPherson.

Para abordar a conjectura, MacPherson definiu a obstrução de Euler local utilizando formas diferenciáveis. A seguir, apresentaremos uma definição alternativa proposta por Brasselet e Schwartz, que utiliza campos vetoriais radiais estratificados, uma abordagem que está alinhada com o conteúdo destas notas.

3.2. A Obstrução de Euler Local

Nesta seção abordamos a obstrução de Euler local. Para formular as definições e resultados de maneira precisa, utilizaremos de forma recorrente noções de estratificações (por exemplo, estratificações de Whitney). As convenções e definições relacionadas a estratificações seguem principalmente [13].

Definição 3.2. Seja X um conjunto fechado de uma variedade suave M . Uma **estratificação** de X é uma filtração por subconjuntos fechados

$$X = X_d \supseteq X_{d-1} \supseteq \cdots \supseteq X_1 \supseteq X_0,$$

tal que cada diferença $V_i = X_i \setminus X_{i-1}$ é uma subvariedade suave de M de dimensão i , ou é vazia. Cada componente de V_i é chamado de **estrato** de dimensão i . Assim, X é a união disjunta de estratos, denotado por $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Se para cada ponto de X existe uma vizinhança em M que intersecta apenas um número





finito de estratos, dizemos que \mathcal{V} é **localmente finito**.

Procuramos estratificações em que pontos de um estrato tenham o mesmo comportamento, isto é, que as vizinhanças desses pontos sejam homeomorfas no estrato a qual os pontos pertencem. Uma das maneiras de garantir isso é a seguinte.

Definição 3.3. Uma estratificação $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ satisfaz a **condição de fronteira** se para todo par de estratos (V_α, V_β) tal que $V_\alpha \cap \overline{V}_\beta \neq \emptyset$, tem-se $V_\alpha \subseteq \overline{V}_\beta$.

Como os estratos são disjuntos, isso significa que $V_\alpha = V_\beta$ ou $V_\alpha \subset \overline{V}_\beta \setminus V_\beta$. Além dessa condição, também adicionamos as condições (a) e (b) de Whitney, definidas a seguir.

Definição 3.4. Dizemos que $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma **estratificação de Whitney** se é uma estratificação satisfazendo a condição de fronteira e se para todo par (V_α, V_β) de estratos tais que $V_\alpha \subset \overline{V}_\beta$, temos

- (a) para toda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V_\beta$ sequência convergindo para $y \in V_\alpha$ e tal que o limite $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} V_\beta$ existe (na Grassmaniana correspondente), temos $T \supset T_y V_\alpha$;
- (b) se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V_\beta$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V_\alpha$ são sequências convergindo para $y \in V_\alpha$ e tais que os limites $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} V_\beta$, $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \overrightarrow{x_n y_n}$ existem, então $T \supset L$.

Uma das razões para escolher as estratificações de Whitney é que toda variedade analítica X (em \mathbb{R}^m ou \mathbb{C}^m) pode ser Whitney-estratificada, resultado provado pelo próprio Whitney em 1965 [14, 15]. Além disso, se \mathcal{C} é uma coleção localmente finita de subconjuntos analíticos de X , então podemos escolher a estratificação \mathcal{V} tal que cada elemento de \mathcal{C} é a união de estratos de \mathcal{V} ; veja, por exemplo, a seção 1.7. *Stratification of Subanalytic Sets and Maps* em [13]. Neste caso, dizemos que a estratificação é *adaptada* a X .

Seja $X \subset M$ uma variedade analítica d -equidimensional mergulhada numa variedade suave M que admite uma estratificação de Whitney adaptada a X . Relembramos que um campo estratificado em X é uma seção v do fibrado tangente $TM|_X$ tal que para cada $x \in X$, o vetor $v(x)$ pertence ao espaço tangente do estrato V_α que contém x .

Lema 3.5. [3] *Cada campo vetorial estratificado v , não nulo num subconjunto $A \subset X$, admite um levantamento canônico para uma seção \tilde{v} do fibrado de Nash sobre $\nu^{-1}(A) \subset \text{Nash}(X)$, em que $\nu : \text{Nash}(X) \rightarrow X$ é a projeção, associada à construção de $\text{Nash}(X)$.*

Denotamos por $B_\varepsilon(x)$ uma vizinhança de x em X e por $S_\varepsilon(x) = \partial B_\varepsilon(x)$ sua fronteira. Sejam v um campo estratificado com singularidade isolada em x e \tilde{v} o seu levantamento canônico sobre $\nu^{-1}(X \cap S_\varepsilon(x))$ como uma seção não nula do fibrado $\text{Nash}(\mathcal{T})$, garantido pelo Lema 3.5. Escrevemos $c(\tilde{v}) \in H^{2d}(\nu^{-1}(X \cap B_\varepsilon(x)), \nu^{-1}(X \cap S_\varepsilon(x)), \mathbb{Z})$ o cociclo de obstrução para





estender \tilde{v} como seção não nula de $\text{Nash}(\mathcal{T})$ em $\nu^{-1}(X \cap B_\varepsilon(x))$.

Definição 3.6. Seja $v = v_{rad}$ um campo vetorial estratificado radial com singularidade isolada em $x \in X$. A **obstrução de Euler local**, $Eu_X(x) \in \mathbb{Z}$, é definida como a avaliação do cociclo $c(\tilde{v})$ na classe fundamental $[\nu^{-1}(X \cap B_\varepsilon(x)), \nu^{-1}(X \cap S_\varepsilon(x))]$.

Observação 3.7. A obstrução de Euler local não é um invariante topológico. É conhecido o exemplo de Briançon-Speder, o qual considera a família

$$\phi_t = x^5 + y^7 z + z^{15} + txy^6$$

quase-homogênea de hipersuperfícies em \mathbb{C}^3 , com singularidade isolada e, portanto, topologicamente trivial. Contudo, a obstrução de Euler local $Eu_{X_t}(0)$ não é constante na família. Para detalhes, consulte a Observação 2.17 em [4].

Teorema 3.8 (Teorema 8.1.1, [16]). *A obstrução de Euler local satisfaz:*

- 1) $Eu_X(x) = 1$, se $x \in X_{reg}$.
- 2) $Eu_{X \times X}(x \times x') = Eu_X(x)Eu_X(x')$.
- 3) Se X é localmente reduzida em x e X_i são suas componentes irredutíveis, então $Eu_X(x) = \sum_i Eu_{X_i}(x)$.
- 4) $Eu_X(x)$ é uma função construível em X . De fato, é constante ao longo de estratos de uma estratificação de Whitney.

A definição 3.6 da obstrução de Euler local não oferece um método direto para calcular este invariante. No entanto, diversos autores propuseram fórmulas para calcular a obstrução de Euler local de uma singularidade. Em [17], os autores reuniram uma coleção de resultados nesse sentido. Por exemplo, há uma fórmula do tipo Lefschetz fornecida por Brasselet, Lê, e Seade em [16].

Considere uma estratificação de Whitney analítica complexa $\mathcal{V} = \{V_i\}$ de um espaço analítico complexo X tal que 0 pertence ao fecho de todas as estratificações. Expressamos X como $X = \cup_{i=0}^q V_i$, onde $V_0 = 0$ e V_q denota a parte regular X_{reg} de X , ou seja, uma estratificação adaptada a X .

Definição 3.9. Uma forma linear $l : U \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $0 \in l^{-1}(0)$, é dita **genérica** (com respeito a X) se $\ker(l)$ é transversal aos limites de espaços tangentes $\{T_{x_n} V_i\}$, para todo estrato V_i e toda sequência $\{x_n\} \subset V_i$ que converge para 0 .

Teorema 3.10 ([18]). *Sejam X e \mathcal{V} definidos como acima. Para cada forma linear genérica l , existe um ε_0 tal que para qualquer ε com $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e $\delta \neq 0$ suficientemente pequeno, a*





obstrução de Euler local de $(X, 0)$ é dada por

$$Eu_X(0) = \sum_{i=1}^q \chi(V_i \cap B_\varepsilon \cap l^{-1}(\delta)) \cdot Eu_X(V_i),$$

onde χ é a característica de Euler, $Eu_X(V_i)$ é a obstrução de Euler local de X em um ponto de V_i , e $0 < |\delta| \ll \varepsilon \ll 1$.

Corolário 3.11. *Seja X uma variedade analítica complexa com uma singularidade isolada na origem. Então,*

$$Eu_X(0) = \chi(X \cap l^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon),$$

onde l é uma forma linear genérica.

3.3. A Obstrução de Euler Local de uma Função

Podemos nos perguntar quais informações obtemos quando fazemos uma construção similar para o caso em que o campo está relacionado com o campo gradiente de uma função holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ com singularidade isolada na origem, restrição de uma função holomorfa $F : U \rightarrow \mathbb{C}$, em que $X \subset U$ é um espaço analítico complexo.

A obstrução de Euler local da função f foi introduzida por Brasselet, Massey, Parameswaran e Seade em [18] para entender o que impede a obstrução de Euler local de satisfazer a condição local de Euler (igualdade do Teorema 3.10) para funções holomorfas com singularidade isolada na origem.

Lembramos que um ponto crítico de f é um ponto $x \in X$ tal que $dF_x(T_x V_x) = 0$. Dizemos que f tem singularidade isolada em $0 \in X$ relativa a estratificação de Whitney se f não tem pontos críticos em uma vizinhança de 0 em X , exceto possivelmente em 0 .

Os autores em [18] constroem um campo de vetores estratificado, denotado por $\overline{\nabla}_X f$, o qual é homotópico ao campo gradiente conjugado $\overline{\nabla} F$, na vizinhança $X \cap S_\varepsilon(0)$.

Definição 3.12. Denote por $\tilde{\nabla}_X f$ o levantamento de $\overline{\nabla}_X f$ sobre $\nu^{-1}(X \cap S_\varepsilon(0))$ como uma seção não nula do fibrado de Nash. A **obstrução de Euler local da função f** , $Eu_{f,X}(0) \in \mathbb{Z}$, é definida como a avaliação do cociclo de obstrução $c(\tilde{\nabla}_X f)$ na classe fundamental $[\nu^{-1}(X \cap B_\varepsilon(0)), \nu^{-1}(X \cap S_\varepsilon(0))]$.

A obstrução de Euler local da função f aparece como um defeito para que a condição local de Euler seja satisfeita:

Teorema 3.13. [18] *Sejam $(X, 0)$ e \mathcal{V} dados como no Teorema 3.10. Tome $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada na origem. Para $0 < |\delta| \ll \varepsilon \ll 1$,*





temos

$$Eu_X(0) = \left(\sum_{i=1}^q \chi(V_i \cap B_\varepsilon(0) \cap f^{-1}(\delta)) \cdot Eu_X(V_i) \right) + Eu_{f,X}(0).$$

Usando Teoria de Morse, Brasselet, Massey, Parameswaran e Seade [18] mostram que a obstrução de Euler local de uma função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, com singularidade isolada na origem, pode ser vista como uma generalização do número de Milnor, *i.e.*, se $X = \mathbb{C}^n$ então $Eu_{f,\mathbb{C}^n}(0) = \mu(f)$. Precisaremos das seguintes definições para enunciar o resultado como proposto originalmente.

Definição 3.14. Um ponto $x \in X$ é dito ser **ponto de Morse** de $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ se é um ponto crítico não degenerado de f , *i.e.*, tal que

$$\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) \neq 0.$$

Seja $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}$ uma estratificação de um espaço analítico complexo reduzido $X \subset \mathbb{C}^n$.

Definição 3.15. Seja um ponto $x \in V_\beta$, em um estrato de \mathcal{V} . Um **plano tangente degenerado** de \mathcal{V} em x é um elemento T da variedade de Grassmann dos n_α -planos em \mathbb{C}^n tal que

$$T = \lim_{x_i \rightarrow x} T_{x_i} V_\alpha,$$

em que $x_i \in V_\alpha$, com $V_\alpha \neq V_\beta$ e $n_\alpha = \dim V_\alpha$.

Agora, considere um germe $(X, 0) \subset (U, 0)$ de espaço analítico complexo em \mathbb{C}^n equipado com uma estratificação de Whitney, e seja $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma função holomorfa, restrição da função holomorfa $F : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$.

Definição 3.16. O ponto 0 é dito ser **ponto genérico** de f se o hiperplano $\text{Ker}(d_0 F)$ é transversal em \mathbb{C}^n a todos os planos tangentes da estratificação de Whitney em 0.

Definição 3.17. Seja $\{V_0, \dots, V_q\}$, com $0 \in V_0$, uma estratificação de Whitney do espaço analítico complexo X . Uma função $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é dita ser **Morse estratificada** se

- i) $\dim V_0 \geq 1$,
- ii) $f|_{V_0} : V_0 \rightarrow \mathbb{C}$ tem um ponto de Morse em 0,
- iii) 0 é um ponto genérico de f com respeito a V_i , para $i \neq 0$.

Uma **Morseficação estratificada** de um germe de função holomorfa $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é uma perturbação \tilde{f} de f tal que é Morse estratificada.

A partir dessas definições, resgatamos a obstrução de Euler local de uma função como generalização do número de Milnor.



Proposição 3.18 (Proposição 2.3 [19]). *Seja $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada na origem, sobre um germe de espaço analítico reduzido complexo $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^m, 0)$, d -equidimensional. Então,*

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)^d n_{reg},$$

em que n_{reg} é o número de pontos de Morse em X_{reg} em uma Morseficação estratificada de f .

Em um contexto mais específico, seja $(X, 0)$ o germe de uma interseção completa com singularidade isolada na origem (ICIS). Mais precisamente,

$$(X, 0) = (\phi^{-1}(0), 0) = (V(\phi_1, \dots, \phi_k), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0),$$

em que $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_k) : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ é um germe de aplicação holomorfa e $\dim X = d = N - k$. Denote por \mathcal{O}_N o anel local dos germes de funções holomorfas em 0. Dado um germe de função holomorfa $g : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, definimos $J(g, \phi) \subset \mathcal{O}_N$ como o ideal gerado pelos menores $(k + 1) \times (k + 1)$ da matriz jacobiana de $(g, \phi_1, \dots, \phi_k)$. Nessa situação, os autores em [20] fornecem a seguinte fórmula para o cálculo da obstrução de Euler local de uma função holomorfa com singularidade isolada.

Teorema 3.19 (Teorema 4.5, [20]). *Seja $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada na origem, definido sobre a ICIS $(X, 0) = (\phi^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ de dimensão d . Então*

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)^d \left(\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{\langle \phi_1, \dots, \phi_k \rangle + J(f, \phi)} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{\langle \phi_1, \dots, \phi_k \rangle + J(l, \phi)} \right),$$

em que $l : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é uma forma linear genérica.

O teorema acima nos permite calcular computacionalmente a obstrução de Euler local de uma função no contexto descrito. Em particular, no caso em que $X = \phi^{-1}(0)$ é uma hipersuperfície em $(\mathbb{C}^N, 0)$ podemos implementar o cálculo em SINGULAR [21] por meio do comando abaixo.

Comando (SINGULAR). O código a seguir recebe como entrada um anel polinomial (com as variáveis desejadas), o ideal $\Phi = \langle \phi \rangle$, bem como os polinômios f e l . Para cada $g \in \{f, l\}$, ele constrói o ideal

$$\langle \phi \rangle + J(g, \phi) = \langle \phi \rangle + I_2(\text{Jac}(g, \phi)),$$

em que $I_2(\text{Jac}(g, \phi))$ denota o ideal gerado pelos menores 2×2 da matriz jacobiana de (g, ϕ) , e calcula a dimensão complexa do quociente correspondente. Por fim, utiliza $d = \dim X = N - 1$ para obter $Eu_{f,X}(0)$.





```

ring R = 0, (x,y,z,w), ds;

// ===== USER INPUT =====
poly phi = x^2 + y^3 - z^5 + w^2;
poly f    = x^2 + y^3 + z^2 - w*x;
poly l    = x + y + 7*z - 5*w;
// =====

// dim_C O/( <phi> + J(g,phi) ), where J(g,phi) = ideal of 2x2 minors of jacob(g,phi)
proc localdim(poly g, poly phi)
{
    ideal F = g, phi;
    matrix J = jacob(F); // 2 x 4
    ideal Min = minor(J,2); // all 2x2 minors
    ideal I = phi, Min;
    ideal G = std(I);

    if (dim(G) != 0)
    {
        print("WARNING: ideal is not 0-dim (check isolation). dim = " + string(dim(G)));
    }

    return(size(kbase(G))); // length of the local algebra
}

// ---- Compute for f and l ----
int dim_f = localdim(f,phi);
int dim_l = localdim(l,phi);

int d = nvars(basing) - 1; // hypersurface => d = 3
int sign;
if (d % 2 == 0) { sign = 1; }
else { sign = -1; }

int Eu = sign * (dim_f - dim_l);

// ---- Output ----
print ("dim O/(<phi> + J(f,phi)) = " + string(dim_f));
print ("dim O/(<phi> + J(l,phi)) = " + string(dim_l));
print ("d = " + string(d));
print ("Eu_{f,X}(0) = " + string(Eu));

```

Exemplo 3.20. O comando acima calcula o Exemplo 4.7 em [20], que considera o germe da hipersuperfície $(X, 0) = (\phi^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$, onde $\phi(x, y, z, w) = x^2 + y^3 - z^5 + w^2$, e a função $f(x, y, z, w) = x^2 + y^3 + z^2 - wx$. A forma linear genérica é tomada como $l(x, y, z, w) = x + y + 7z - 5w$.





Aplicando o comando no SINGULAR, obtemos

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_4}{\langle \phi \rangle + J(f, \phi)} = 21, \quad \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_4}{\langle \phi \rangle + J(l, \phi)} = 10.$$

Como $\dim X = 3$, segue que

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)^3(21 - 10) = -11.$$

Para aplicar o comando a outros exemplos, basta substituir o anel `ring` e os polinômios `phi, f e l`.

Em [18] os autores também investigam o caso em que $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ pode ter singularidade não isolada. Neste caso, a construção geométrica de $Eu_{f,X}(0)$ não faz sentido, mas definem um *defeito*.

Definição 3.21. Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um espaço analítico complexo equidimensional e $U \subset \mathbb{C}^n$ um aberto contendo um representante suficientemente pequeno de $(X, 0)$. Considere f a restrição em $(X, 0)$ de um germe de função holomorfa $F : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ e $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=0}^q$ uma estratificação de Whitney de U adaptada a X . O **defeito de Euler** é definido como

$$D_{f,X}(0) := Eu_X(0) - \left(\sum_{i=1}^q \chi(V_i \cap B_\varepsilon(0) \cap f^{-1}(\delta)) \cdot Eu_X(V_i) \right),$$

em que $0 < |\delta| \ll \varepsilon \ll 1$.

Esta definição está diretamente ligada a outro invariante introduzido por Dutertre e Grulha em [22]. Para facilitar a compreensão, introduzimos a seguinte definição:

Definição 3.22. Uma **boa estratificação** de X relativa a função f é uma estratificação \mathcal{V} de X a qual é adaptada a $V(f)$ e tal que $\{V_\lambda \in \mathcal{V}; V_\lambda \not\subseteq V(f)\}$ é uma estratificação de Whitney de $X \setminus V(f)$. Além disso, cada par (V_α, V_β) tal que $V_\alpha \not\subseteq V(f)$ e $V_\beta \subseteq V(f)$ deve satisfazer a condição (a_f) de Thom.

Agora, seja $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa sobre um espaço analítico complexo equidimensional $(X, 0)$. Considere $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=0}^q$ uma boa estratificação de um representante X relativa a f .

Definição 3.23. O **número de Brasselet** de f na origem é definido como

$$B_{f,X}(0) := \sum_{i=1}^q \chi(V_i \cap f^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon(0)) Eu_X(V_i),$$

em que $0 < |\delta| \ll \varepsilon \ll 1$.





Em particular, se f tem singularidade isolada na origem, o Teorema 3.13 garante que o número de Brasselet é $B_{f,X}(0) = Eu_X(0) - Eu_{f,X}(0)$.

3.4. A Obstrução de Euler Local de uma Aplicação

A generalização natural da obstrução de Euler local de uma função é a obstrução de Euler local de uma aplicação, definida por Grulha em [4]. As ideias apresentadas em [4] seguem a construção da obstrução de Euler local de um r -campo vetorial estratificado, que pode ser encontrada em [23]. Relembramos as definições dadas por Grulha.

Sejam $(X, 0) \subset (U, 0)$ um espaço analítico complexo d -equidimensional e $U \subset \mathbb{C}^n$ um aberto. Denotamos por $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=0}^q$ uma estratificação de Whitney de U adaptada a X . Considere também $f : X \rightarrow \mathbb{C}^r$, $f = (f_1, \dots, f_r)$, $r \leq d$, uma aplicação holomorfa que é restrição de $F : U \rightarrow \mathbb{C}^r$.

Denote por $|K|$ uma triangularização de U compatível com a estratificação \mathcal{V} , e seja (D) uma decomposição celular que é dual a $|K|$. Suponha que x é o baricentro de um $(k-1)$ -simplexo de $|K|$ e seja σ a célula de (D) de dimensão real $2(N-r+1)$ dual desse simplexo; o ponto x também é baricentro de σ .

Para cada função componente f_i de f podemos associar um campo estratificado $\overline{\nabla}_X f_i$, o qual é homotópico ao campo gradiente conjugado $\overline{\nabla} F_i$, como na Definição 3.12. Grulha constrói um r -campo, denotado por $\overline{\nabla}_X^{(r)} f$, que é estratificado sem singularidades em $(S_\varepsilon(x) \cap X) \setminus \Sigma f$. Caso X seja suave e $\dim(\Sigma f) \leq r-1$, pode-se escolher uma célula σ tal que $\Sigma f \cap \sigma = \emptyset$.

Definição 3.24. Dizemos que f satisfaz a **condição** (δ) se existe uma célula de σ de baricentro x e dimensão real $2(N-r+1)$ de uma decomposição celular (D) de U tal que

$$\Sigma f \cap \sigma = \emptyset.$$

De acordo com Grulha [4], se X for singular com $\dim(\text{Sing}(X)) \leq r-1$ e $\dim(\Sigma f|_{X_{reg}}) \leq r-1$, então existe σ satisfazendo a condição (δ) . Neste caso, existe um levantamento do campo $\overline{\nabla}_X^{(r)} f$ como um conjunto de r seções linearmente independentes do fibrado de Nash, sobre $\nu^{-1}(\partial\sigma \cap X)$; denotamos esse levantamento por $\tilde{\nabla}_X^{(r)} f$ e por $c(\tilde{\nabla}_X^{(r)} f) \in H^{2(d-r+1)}(\nu^{-1}(\sigma \cap X), \nu^{-1}(\partial\sigma \cap X), \mathbb{Z})$ o cociclo de obstrução em estender as r seções $\tilde{\nabla}_X^{(r)} f$ como conjunto linearmente independente em $\nu^{-1}(\sigma \cap X)$.

Definição 3.25. A **obstrução de Euler local da aplicação** $f : X \rightarrow \mathbb{C}^r$, $Eu_{f,X}(\sigma, x) \in \mathbb{Z}$, como a avaliação do cociclo $c(\tilde{\nabla}_X^{(r)} f)$ na classe fundamental do par $[\nu^{-1}(\sigma \cap X), \nu^{-1}(\partial\sigma \cap X)]$.

Perceba que a notação de obstrução de Euler local de uma aplicação destaca a escolha de σ feita na Definição 3.24. A definição apresentada acima, *a priori*, depende dessa escolha. Contudo,





Ebeling e Gusein-Zade em [24] introduzem a chamada *obstrução de Chern local* para uma coleção de 1-formas, a qual coincide a menos de sinal com a obstrução de Euler local de uma aplicação; essa última afirmação foi provada por Brasselet, Grulha e Ruas em [25].

A construção feita por Ebeling e Gusein-Zade não depende de escolhas na decomposição celular. Assim, a partir de agora, denotamos a obstrução de Euler local de uma aplicação f sobre X , num ponto x , por $Eu_{f,X}(x)$.

A interpretação geométrica da obstrução de Euler local de uma aplicação é estudada por Grulha, Santana, e Ruiz em [26]. Os autores utilizam da Teoria desenvolvida por Dutertre e Grulha [22] para expressar a obstrução de Euler local de uma aplicação f como o número de pontos de Morse de uma Morseficação apropriada das funções coordenadas de f . Para ser mais preciso, vamos relembrar alguns conceitos.

Definição 3.26. Uma estratificação de Whitney \mathcal{V} de X satisfaz a **condição (a_f) de Thom** com respeito a $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ se a diferencial df tem posto constante em cada estrato e

$$\text{Ker}(d_x(f|_{V_\alpha})) \supset \lim_{n \rightarrow \infty} d_{x_n}(f|_{V_\beta}),$$

em que $\text{Ker}(d_x(f))$ denota o núcleo da aplicação $d_x f$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V_\beta$ é uma sequência convergindo para $x \in V_\alpha$.

Considere $(X, 0)$ um espaço analítico complexo reduzido e $f, g : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ germes de função holomorfa. Seja $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma boa estratificação de X relativa a f . Adotamos a notação $X^f = X \cap V(f) = X \cap \{f = 0\}$.

Definição 3.27. O **conjunto crítico de f relativo a \mathcal{V}** , $\Sigma_{\mathcal{V}} f$, é dado como a união

$$\Sigma_{\mathcal{V}} f = \bigcup_{V_\lambda \in \mathcal{V}} \Sigma(f|_{V_\lambda}).$$

Definição 3.28. Se $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}$ é uma estratificação de X , a **variedade polar relativa simétrica** de f e g com respeito a \mathcal{V} , $\tilde{\Gamma}_{f,g}(\mathcal{V})$, é a união $\cup_\lambda \bar{\Gamma}_{f,g}(V_\lambda)$, em que $\bar{\Gamma}_{f,g}(V_\lambda)$ denota o fecho em X do conjunto crítico de $(f, g)|_{V_\lambda \setminus (X^f \cup X^g)}$.

Definição 3.29. O germe de função g é dito **tratável na origem com respeito a boa estratificação** \mathcal{V} de X relativa a f se $\dim \tilde{\Gamma}_{f,g}(\mathcal{V}) \leq 1$ e, para todo estrato $V_\alpha \subseteq X^f$, a função $g|_{V_\alpha}$ não tem pontos críticos numa vizinhança pinçada da origem.

Agora, sejam $(X, 0) \subset (U, 0)$ um espaço analítico complexo reduzido de dimensão $d > 2$, em que $U \subset \mathbb{C}^n$ é um aberto, e $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ $f = (f_1, f_2)$, um germe de aplicação holomorfa, restrição de $F : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$.





Teorema 3.30. [26] *Suponha que f_1 é tratável na origem com respeito a uma boa estratificação de X relativa a f_2 . Então, a obstrução de Euler local $Eu_{f, X \cap f_2^{-1}(\delta)}(x)$ de $f = (f_1, f_2)$ em um ponto $x \in X \cap f_2^{-1}(\delta)$ é igual ao número de pontos críticos de Morse de uma Morseificação de $f_1|_{X_{reg} \cap f_2^{-1}(\delta)}$ aparecendo em $X_{reg} \cap f_2^{-1}(\delta)$, para $0 < |\delta| \ll \varepsilon \ll 1$.*

4. Variedades Determinantais

Nesta seção, são apresentadas as principais definições e resultados das singularidades determinantais. Introduzimos as Variedades Determinantais Genéricas, que estão contidas no espaço de matrizes e nos fornecem importantes exemplos em Geometria Algébrica. As variedades determinantais são, em poucas palavras, a imagem inversa de uma variedade genérica por uma aplicação analítica.

Essa classe de singularidades pode ser vistas como generalizações das interseções completas, as quais têm sido bem estudadas por algebristas e singularistas.

4.1. Variedades Determinantais Genéricas

As variedades determinantais genéricas têm um papel de destaque na geometria algébrica, como exemplos de curvas racionais, variedades de Veronese e variedades de Segre. Sua configuração matricial nos fornece ferramentas da álgebra linear e é fundamental para obter informações das singularidades determinantais. Recordamos a seguir a definição dessas variedades, detalhando os exemplos citados acima.

Fixamos a seguinte notação para o texto que segue. Denotamos por $M_{m,n}$ o espaço de todas as matrizes $m \times n$ com entradas em \mathbb{C} .

Definição 4.1. Para $t \leq \min\{m, n\}$ definimos o conjunto

$$M_{m,n}^t := \{A \in M_{m,n} \mid \text{posto}(A) < t\},$$

chamado de **variedade determinantal genérica**.

Perceba que a variedade determinantal genérica pode ser escrita como $M_{m,n}^t = V(I) \subset \mathbb{C}^{mn}$, em que $I \subset \mathbb{C}\{x_{11}, \dots, x_{mn}\}$ é o ideal gerado pelos $t \times t$ determinantes menores da matriz

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

De fato, uma matriz A tem posto igual a s se, e somente se, existe um $s \times s$ determinante menor não nulo e todos $(s+1) \times (s+1)$ determinantes menores são nulos.





A variedade $M_{m,n}^t$ é irredutível e singular de codimensão $(m - t + 1)(n - t + 1)$ em $M_{m,n}$ e seu conjunto singular é $M_{m,n}^{t-1}$. Além disso, $M_{m,n}^t = \bigcup_{i=1}^t (M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1})$ é uma estratificação de Whitney [27].

Nos próximos exemplos, de variedades determinantis genéricas, denotamos por \mathbb{P}^n o espaço projetivo complexo n -dimensional.

Exemplo 4.2 (Curvas Racionais Normais). Uma curva racional normal $C \subset \mathbb{P}^n$ é a imagem de $\nu_n : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ dada por

$$\nu_n(x_0 : x_1) = (x_0^n : x_0^{n-1}x_1 : x_0^{n-2}x_1^2 : \dots : x_1^n) = (z_0 : z_1 : z_2 : \dots : z_n).$$

Equivalentemente, C pode ser entendida como a variedade projetiva definida como o conjunto de pontos $(z_0 : z_1 : z_2 : \dots : z_n) \in \mathbb{P}^n$ tais que a matriz abaixo tem posto 1.

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \cdot & \cdot & z_{n-2} & z_{n-1} \\ z_1 & z_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z_n \end{pmatrix}$$

Quando $n = 2$, obtemos o cone plano $z_0z_2 = z_1^2$; para $n = 3$, temos a cúbica torcida $V(z_1^2 - z_0z_2, z_1z_2 - z_0z_3, z_2^2 - z_1z_3)$.

De um modo mais geral do que as curvas racionais normais, temos as variedades de Veronese:

Exemplo 4.3 (Variedade de Veronese). Uma variedade de Veronese é dada como imagem da aplicação

$$\begin{aligned} \nu_n : \mathbb{P}^k &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ (x_0 : \dots : x_k) &\longmapsto (\dots : x^I : \dots), \end{aligned}$$

onde x^I são todos monômios de grau n em x_0, \dots, x_k e $N = \binom{k+n}{n} - 1$.

A superfície de Veronese

$$V(z_0z_1 - z_3^2, z_0z_2 - z_4^2, z_1z_2 - z_5^2, z_2z_3 - z_4z_5, z_1z_4 - z_3z_5, z_3z_4 - z_0z_5)$$

é a imagem de \mathbb{P}^2 em \mathbb{P}^5 , via ν_2

$$\nu_2(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2) = (z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5).$$

Essa superfície é o conjunto de pontos $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5) \in \mathbb{P}^5$ tal que a seguinte matriz tem posto 1

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_3 & z_4 \\ z_3 & z_1 & z_5 \\ z_4 & z_5 & z_2 \end{pmatrix}.$$



Exemplo 4.4 (Variedade de Segre). A variedade de Segre $\mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ é uma variedade determinantal genérica do tipo $M_{m,n}^2$, isto é, a imagem da aplicação de Segre

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{P}^{mn-1} \\ (x_0 : \dots : x_{m-1}, y_0 : \dots : y_{n-1}) &\mapsto (\dots : x_i y_j : \dots), \end{aligned}$$

em que $(\dots : x_i y_j : \dots)$ são todos produtos dois a dois das coordenadas x_i e y_j . Para $m = n = 2$ temos a superfície quadrática em \mathbb{P}^3 ,

$$\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = \{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \in \mathbb{P}^3; \det \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} = 0\}.$$

A figura abaixo mostra o conjunto de pontos reais da superfície quadrática de Segre, os quais formam um hiperboloide. As linhas em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, do lado esquerdo, são mapeadas em linhas em $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$, do lado direito.

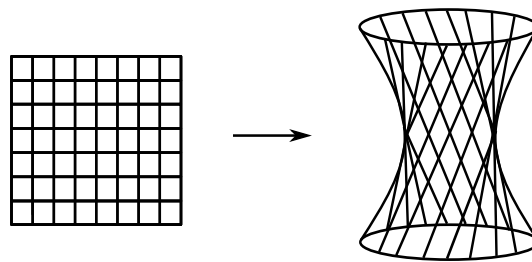


Figura 1. Superfície Quadrática de Segre

Quando $m = 3$ e $n = 2$, chamamos de 3-variedade de Segre

$$\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1) = \{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5); \text{posto} \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 & z_5 \end{pmatrix} < 2\}.$$

4.2. Variedades Determinantais

As variedades determinantais têm se destacado na Teoria de Singularidades e na Geometria Algébrica, como generalizações naturais das interseções completas.

Estas variedades também têm aplicações na Física, como na Teoria Quântica de Campos. A estrutura determinantal, com uma estratificação pelo posto da matriz, também tem permitido o uso simplificado de algoritmos, como na Ressonância Magnética Nuclear proveniente da Teoria de Controle; veja, por exemplo as referências [28, 29].



Seja $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$ uma aplicação tal que as entradas de $F(x)$

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1}(x) & \dots & f_{mn}(x) \end{pmatrix},$$

são funções analíticas complexas definidas sobre um domínio $U \subset \mathbb{C}^N$.

Definição 4.5. Dizemos que $X = F^{-1}(M_{m,n}^t) \subset U$ é uma **variedade determinantal** do tipo (m, n, t) se sua codimensão é $(m - t + 1)(n - t + 1)$ em \mathbb{C}^N .

Analogamente ao caso das variedades determinantis genéricas, podemos escrever $X = V(m_{IJ}^t) \subset \mathbb{C}^N$, em que m_{IJ}^t são os $t \times t$ determinantes menores da matriz $F = (f_{ij})$, com $I \subset \{1, \dots, m\}$ e $J \subset \{1, \dots, n\}$ representando todos os subconjuntos com t elementos. Em geral não incluiremos a aplicação F para denotar uma variedade determinantal X ; quando necessário, podemos dizer que F é a *matriz de representação* de X .

Definição 4.6. O germe $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ de uma variedade determinantal é chamado de **singularidade determinantal**.

Como já comentado, essa classe de singularidades engloba as singularidades de interseção completa. Seja $f = (f_1, \dots, f_n) : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de aplicação holomorfa tal que $(X, 0) = (f^{-1}(0), 0)$ é uma singularidade de interseção completa, de dimensão $N - n$. Então, $(X, 0)$ é uma singularidade determinantal do tipo $(1, n, 1)$. A recíproca também é válida.

Exemplo 4.7. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}^3 &\longrightarrow M_{2,3} \\ (x, y, z) &\longmapsto \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A variedade determinantal $X = F^{-1}(M_{2,3}^2) = V(-yz, xz, xy)$, do tipo $(2, 3, 2)$, é representada pelos três eixos coordenados em \mathbb{C}^3 , que tem por ideal $\mathcal{I}(X, 0) = \langle xy, xz, yz \rangle$. Por um lado, o número mínimo de geradores desse ideal é 3, por outro lado $\dim(X, 0) = 1$. Assim, $(X, 0)$ é um exemplo de singularidade determinantal que não é uma singularidade de interseção completa.

As singularidades determinantis também fornecem exemplos de singularidades não isoladas. Ebeling e Gusein-Zade [30] definem um tipo especial de singularidade não isolada e usam propriedades de transversalidade para estudar esses casos.

Definição 4.8. Um ponto $x \in X = F^{-1}(M_{m,n}^t)$ é **essencialmente isolado** se a aplicação F é transversal ao estrato correspondente da variedade $M_{m,n}^t$.





Isto significa que se $x \in U$ é essencialmente isolado e $\text{posto}(F(x)) = i - 1$, com $0 < i \leq t$, então F é transversal ao estrato $M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}$ no ponto $F(x)$. Assim,

$$DF_x(T_x U) \oplus T_{F(x)}(M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}) = T_{F(x)}M_{m,n}.$$

Definição 4.9. Um germe de variedade determinantal $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ é uma **singularidade determinantal essencialmente isolada** se existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{C}^N$ tal que os pontos singulares de X em $U \setminus \{0\}$ são essencialmente isolados.

Escrevemos EIDS como sendo a sigla de *essentially isolated determinantal singularity*, o qual tem uso comum na literatura. Uma EIDS em $(\mathbb{C}^N, 0)$ do tipo (m, n, t) tem uma singularidade isolada na origem se, e somente se, $N \leq (m - t + 2)(n - t + 2)$ [30]; neste caso, usamos a sigla IDS.

Pelo critério geométrico (Teorema 2.4.1 em [31]), são exemplos de EIDS todas singularidades determinantis finitamente determinadas.

4.3. A Obstrução de Euler Local em Variedades Determinantis

O estudo da obstrução de Euler local em variedades determinantis é realizado por Gaffney, Grulha e Ruas em [32], onde é fornecida uma fórmula para variedades determinantis genéricas usando apenas binômios de Newton.

Teorema 4.10 ([32]). *Seja $M_{m,n}^t$ uma variedade determinante genérica. Suponha que $m \leq n$, então*

$$Eu_{M_{m,n}^t}(0) = \binom{m}{t-1}.$$

No caso de uma variedade determinantal com uma singularidade isolada, podemos aplicar o Corolário 3.11 para determinar a obstrução de Euler local, conforme ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 4.11. Por mudanças de coordenadas e uma permutação das linhas, as seguintes matrizes são equivalentes:

$$\begin{pmatrix} w + v^k & y & x \\ z & w & yv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z & y & xw \\ y + w^k & x & v \end{pmatrix},$$

para $k \geq 1$ fixo.

Se $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^5, 0)$ é um germe de uma variedade determinantal de dimensão 3, do tipo $(2,3,2)$, dada por uma dessas matrizes, podemos escolher $l(x, y, z, w, v) = v - z$, e a superfície $X \cap l^{-1}(0)$ tem a matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z & y & xw \\ y + w^k & x & z \end{pmatrix}.$$





Sabe-se, a partir de Damon e Pike em [33], que $(-1)^{\dim X - 1} \chi(X \cap l^{-1}(0)) - 1 = 3k + 2$ para um número finito de k 's. Neste caso, temos

$$Eu_X(0) = \chi(X \cap l^{-1}(0)) = 3k + 3.$$

Em [34], os autores apresentam relações da obstrução de Euler local de uma aplicação com outros invariantes conhecidos da Teoria de Singularidades.

Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{N+1}, 0)$ uma IDS do tipo (m, n, t) de dimensão $d + 1$, com $d > 1$. Considere $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ um germe de aplicação holomorfa, restrição de $F : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, $U \subset \mathbb{C}^{N+1}$ aberto. Denotamos por $H = f_2^{-1}(0)$ e por $H_\delta = f_2^{-1}(\delta)$.

Teorema 4.12 ([34]). *Sejam $(X, 0)$ uma IDS de dimensão $d + 1$, com $d > 1$ e $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ como acima, tal que $F_{2|X} = f_2$ é linear, e $F_{1|Y} = f_1$ tem singularidade isolada na origem, em que $Y = X \cap H$. Então, a obstrução de Euler local $Eu_{f, X \cap H_\delta}(x)$ de f em um ponto $x \in X \cap H_\delta$ é igual as seguintes equivalentes expressões:*

- (a) $ind_{PHN}(df_1, Y, 0)$;
- (b) $\nu(Y, 0) + \nu(Y \cap f_1^{-1}(0), 0)$;
- (c) $\nu(Y \cap f_1^{-1}(0), 0) + (-1)^d (Eu_X(0) + 1)$;
- (d) $\nu(Y \cap f_1^{-1}(0), 0) + m_d(Y) + (-1)^d (Eu_Y(0) - 1)$;
- (e) $\nu(Y, 0) + \nu(Y \cap l^{-1}(0), 0) + (-1)^d Eu_{f_1, Y}(0)$, em que $l : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função linear genérica com relação a Y ;
- (f) $m_d(Y) + (-1)^d Eu_{f_1, Y}(0)$;
- (g) $\nu(Y, 0) + (-1)^{d-1} (B_{f_1, Y}(0) - 1)$.

No resultado acima, $ind_{PHN}(\omega, Y, 0)$ representa o índice de Poincaré-Hopf-Nash de uma 1-forma holomorfa ω sobre Y , definida em [30]. A multiplicidade polar, $m_d(Y)$ é definida por Gaffney [35]. Por fim, a característica de Euler evanescente de uma d -dimensional EIDS $(X, 0)$, é definida por

$$\nu(X, 0) := (-1)^d (\chi(\overline{X}_s) - 1),$$

em que \overline{X}_s é a fibra determinantal de Milnor de $(X, 0)$.

Em [36], é possível encontrar exemplos da obstrução de Euler local, multiplicidade polar e obstrução de Euler local de aplicação para superfícies, 3-variedades e 4-variedades determinantis, as quais são Cohen-Macaulay de codimensão 2.

Exemplo 4.13. Seja $(X, 0)$ um germe da 4-variedade determinantal do tipo $(2, 3, 2)$ que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} u & y & z \\ x & w & v^2 + y^3 + u^5 \end{pmatrix}.$$



Agora, escolha $l_2(x, y, z, w, v, u) = u - w$ e a 3-variedade determinantal $Y = X \cap l_2^{-1}(0)$ tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} w & y & z \\ x & w & v^2 + y^3 \end{pmatrix}.$$

Podemos então tomar $l_1(x, y, z, w, v) = v$, obtendo uma superfície determinantal $Y \cap l_1^{-1}(0)$ dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} w & y & z \\ x & w & y^3 \end{pmatrix}.$$

Com isso, $Eu_{l, X \cap l_2^{-1}(\delta)}(x) = \nu(Y, 0) + \nu(Y \cap l_1^{-1}(0)) = 4$, em que $l = (l_1, l_2)$ e $\nu(Y, 0) = 1$, $\nu(Y \cap l_1^{-1}(0)) = 3$ podem ser encontrados no Capítulo 5 em [36].

5. Agradecimentos

O autor agradece ao Grupo de Teoria de Singularidades do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, em especial ao professor José Edson Sampaio, pelas valiosas sugestões feitas durante o minicurso que inspirou estas notas. Agradece, ainda, aos professores Nivaldo Grulha Jr. e Miriam Pereira por o terem introduzido à teoria de obstruções e à teoria de variedades determinantis durante o período de doutoramento. Por fim, agradece aos pareceristas pelas contribuições e sugestões que aprimoraram o texto.

O autor foi parcialmente financiado pela bolsa de pós-doutorado da FUNCAP, processo nº FPD-0213-00092.01.00/23.

Referências

- [1] MacPherson R. Chern Classes for Singular Algebraic Varieties. *Annals of Mathematics*. 1974;100(2):423-32.
- [2] Schwartz MH. Classes Caractéristiques Définies par une Stratification d'une Variété Analytique Complexe. *CR Acad Sci Paris*. 1965;260:3262-4.
- [3] Brasselet JP, Schwartz MH. Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe, caractéristique d'Euler–Poincaré. *Astérisque*. 1981;82:93-147.
- [4] Grulha NG Jr. Obstrução de Euler de Aplicações Analíticas [Tese (Doutorado em Matemática)]. São Paulo: Universidade de São Paulo; 2007.
- [5] Brasselet JP. An Introduction to Characteristic Classes. Rio de Janeiro: IMPA; 2011.
- [6] Martins EBC. Obstruction theory, characteristic classes and applications [Dissertação (Mestrado em Matemática)]. São Paulo: Universidade de São Paulo; 2022.
- [7] Munkres JR. Elements of algebraic topology. CRC press; 2018.
- [8] Alexander JW. A proof of the invariance of certain constants of analysis situs. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1915;16(2):148-54.
- [9] Hatcher A. Algebraic Topology. Cambridge: Cambridge University Press; 2002.





- [10] Brasselet JP, Thuy NTB. Teorema de Poincaré-Hopf. *CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática*. 2019.
- [11] Sullivan D. Combinatorial invariants of analytic spaces. In: *Proceedings of Liverpool Singularities—Symposium I*. Springer; 2006. p. 165-77.
- [12] Brasselet JP. *Characteristic Classes and Singular Varieties*. School on Singularities in Geometry, Topology, Foliations and Dynamics; 2002.
- [13] Goresky M, MacPherson R. *Stratified Morse Theory*. In: *Stratified Morse Theory*. Springer; 1988. p. 3-22.
- [14] Whitney H. Local Properties of Analytic Varieties. *Differential and Combinatorial Topology: A Symposium in Honor of Marston Morse*. 1965:496-549.
- [15] Whitney H. Tangents to an Analytic Variety. *Annals of Mathematics*. 1965:496-549.
- [16] Brasselet JP, Lê DT, Seade J. Euler obstruction and indices of vector fields. *Topology*. 2000;39(6):1193-208.
- [17] Brasselet JP, Grulha Jr NG, Nguyen TTB. Local Euler Obstruction, Old and New III. *Journal of Singularities*. 2022;25:90-122.
- [18] Brasselet JP, Massey D, Parameswaran A, Seade J. Euler obstruction and defects of functions on singular varieties. *Journal of the London Mathematical Society*. 2004;70(1):59-76.
- [19] Seade J, Tibar M, Verjovsky A. Milnor numbers and Euler obstruction. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*. 2005;36:275-83.
- [20] Ament D, Nuño-Ballesteros J, Oréface-Okamoto B, Tomazella J. The Euler obstruction of a function on a determinantal variety and on a curve. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*. 2016;47(3):955-70.
- [21] Decker W, Greuel GM, Pfister G, Schönemann H. *SINGULAR 4-4-0 — A computer algebra system for polynomial computations*; 2024. <http://www.singular.uni-kl.de>.
- [22] Dutertre N, Grulha Jr NG. Lê–Greuel type formula for the Euler obstruction and applications. *Advances in Mathematics*. 2014;251:127-46.
- [23] Brasselet JP, Seade J, Suwa T. *Vector Fields on Singular Varieties*. Springer Science & Business Media; 2009.
- [24] Ebeling W, Gusein-Zade SM. Chern obstructions for collections of 1-forms on singular varieties. In: *Singularity Theory: Dedicated to Jean-Paul Brasselet on His 60th Birthday*. World Scientific; 2007. p. 557-64.
- [25] Brasselet JP, Grulha Jr NG, Ruas MAS. The Euler obstruction and the Chern obstruction. *Bulletin of the London Mathematical Society*. 2010;42(6):1035-43.
- [26] Grulha Jr NG, Ruiz CM, Santana H. The geometrical information encoded by the Euler obstruction of a map. *International Journal of Mathematics*. 2022;33(04):2250029.
- [27] Arbarello E, Cornalba M, Griffiths PA, Harris J. *Geometry of Algebraic Curves*. New York: Springer-Verlag; 2011.
- [28] Bonnard B, Faugère JC, Jacquemard A, Safey El Din M, Verron T. Determinantal sets, singularities and application to optimal control in medical imagery. In: *Proceedings of*





- the ACM on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation; 2016. p. 103-10.
- [29] Jockers H, Kumar V, Lapan JM, Morrison DR, Romo M. Nonabelian 2D Gauge theories for determinantal Calabi-Yau varieties. *Journal of High Energy Physics*. 2012;2012(11):1-47.
- [30] Gusein-Zade SM, Ebeling W. On indices of 1-forms on determinantal singularities. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2009;267(1):113-24.
- [31] Pereira MdS. *Variedades determinantis e singularidades de matrizes [Tese (Doutorado em Matemática)]*. São Paulo: Universidade de São Paulo; 2010.
- [32] Gaffney T, Grulha Jr NG, Ruas MAS. The Local Euler Obstruction and Topology of the Stabilization of Associated Determinantal Varieties. *Mathematische Zeitschrift*. 2019;291(3):905-30.
- [33] Damon J, Pike B. Solvable Groups, Free Divisors and Nonisolated Matrix Singularities II: Vanishing Topology. *Geometry & Topology*. 2014;18(2):911-62.
- [34] de Omena R, Grulha Jr NG, Pereira M. From Milnor Number to the Euler Obstruction of a Map on Isolated Determinantal Singularities. *Manuscripta Mathematica*. 2024:1-17.
- [35] Gaffney T. Polar multiplicities and equisingularity of map germs. *Topology*. 1993;32(1):185-223.
- [36] de Omena R. *Do Número de Milnor à Obstrução de Euler de uma Aplicação em Singularidades Determinantis [Tese (Doutorado em Matemática)]*. São Paulo: Universidade de São Paulo; 2023.

