# Um convite à teoria algébrica de formas quadráticas e de formas hermitianas

**Kaique Ribeiro Prates Santos**[1], **Hugo Luiz Mariano**[2]

[1]Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo
Rua do Matão, 1010 - São Paulo/SP – Brasil

[2]Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo
Rua do Matão, 1010 - São Paulo/SP – Brasil

kaique.rps@ime.usp.br, hugomar@ime.usp.br

***Abstract.*** *The purpose of this work is twofold: to provide an introduction for readers unfamiliar with the algebraic theory of forms quadratics over fields (ATQF) and, subsequently, with the referent constructed in the ATQF, to introduce the algebraic theory of hermitian forms with coefficients in associative algebras equipped with an involution (ATHF).*

***Keywords –*** *quadratic forms, Witt ring, algebras with involution, hermitian forms.*
***MSC2020 –*** *11E39, 11E81*

***Resumo.*** *O objetivo deste trabalho é duplo: fornecer uma introdução para os leitores que não estão familiarizados com a teoria algébrica das formas quadráticas sobre corpos (TAFQ) e, na sequência, com o referente construído na TAFQ, introduzir a teoria algébrica de formas hermitianas com coeficientes em álgebras associativas munidas de uma involução (TAFH).*

***Palavras-chave –*** *formas quadráticas, anel de Witt, álgebras com involução, formas hermitianas.*

## 1. Agradecimentos

Registramos nossos agradecimentos aos revisores do presente trabalho por suas atentas leituras e inúmeras sugestões que muito nos ajudaram a aperfeiçoar a versão original submetida. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Submetido em 9 de janeiro de 2022, revisado em 29 de novembro de 2022.

## 2. Introdução

Uma forma quadrática pode ser vista como uma espécie de norma obtida de um "produto interno generalizado" –uma forma bilinear simétrica–, definido sobre um corpo de escalares geral, mas obedecendo uma única restrição técnica. O foco da Teoria Algébrica das Formas Quadráticas (TAFQ) é detectar algumas propriedades do corpo de escalares por meio de uma coleção relevante das formas bilineares sobre este corpo, devidamente organizadas em uma estrutura de anel (comutativo e com unidade), o anel de Witt deste corpo base. Destacamos que o conceito de ordem sobre um corpo é um aspecto relevante para o estudo da TAFQ. Estes tópicos, e suas inter-relações, serão apresentados na seção 3 do trabalho.

Já as formas hermitianas são consideradas sobre uma estrutura algébrica diferente: uma álgebra associativa, definida sobre um corpo base, e munida de uma involução (pense aqui nos produtos internos definidos sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$). Na seção 4 do trabalho apresentaremos os elementos centrais da Teoria Algébrica das Formas Hermitianas (TAFH).

Neste trabalho, a palavra "anel" sempre designará algum anel munido de unidade.

Fixamos aqui a hipótese técnica, que permeará todo o trabalho: *Todos os corpos considerados neste artigo terão característica diferente de 2.*

Reservaremos a notação $\mathbb{F}$ para indicar corpos.

## 3. Elementos da Teoria Algébrica das Formas Quadráticas

Nesta seção do trabalho, reunimos os principais ingredientes do desenvolvimento "clássico" da teoria algébrica de formas quadráticas (TAFQ) sobre um corpo de característica diferente de 2, a saber: formas quadráticas (aspectos geométricos), isometria, equivalência de Witt, anel de Witt ($W(\mathbb{F})$), teoria da ordem sobre corpos, assinaturas, ideais primos de $W(\mathbb{F})$, e alguns resultados de estrutura do anel de Witt. Nossa exposição frequentemente estará próxima do livro [1] de T. Y. Lam e das dissertações de mestrado [2] e [3].

Alertamos que, a fim de abrir caminho mas também deixar espaço para o desenvolvimento da seção 4, que introduzirá os elementos da Teoria Algébrica de Formas Hermitianas (TAFH), não poderemos abordar nesta primeira seção outros temas mais especializados mas interessantes da TAFQ, como os desenvolvimentos de Albrech Pfister a partir de meados da década de 1960 ([4]); o estudo do anel *graduado* de Witt e suas relações com a cohomologia galoisiana, tema desenvolvido, em particular, por John Milnor no célebre artigo [5]; o desenvolvimento da teoria *reduzida* de formas quadráticas, tema de pesquisas iniciado na década de 1980 ([6]); e elementos das teoria abstratas de formas quadráticas ([7]).

### 3.1. Formas quadráticas sobre corpos

A origem da teoria algébrica de formas quadráticas é bastante geométrica e, de fato, alguns ingredientes geométricos (como os conceitos de ortogonalidade e de reflexão) são essenciais para produzir os passos iniciais desta teoria algébrica. Abordaremos aqui: o conceito de forma quadrática (e descrições equivalentes), a relação de isometria entre duas formas de mesma dimensão, diagonalização de formas quadráticas, formas regulares, formas isotrópicas, somas ortogonais e produto de Kronecker de formas, e os teoremas de cancelamento e de decomposição (ambos devidos a Ernst Witt, desenvolvidos no artigo seminal de 1937, [8]).

**Definição 3.1** (Forma quadrática)**.** Dado um corpo $\mathbb{F}$, uma **forma quadrática** $q$ sobre $\mathbb{F}$ é um polinômio homogêneo de grau 2 com coeficientes em $\mathbb{F}$. Logo temos que

$$q(aX) = a^2 q(X), \forall a \in \mathbb{F}, X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{F}^n.$$

O número $n$ de indeterminadas em $q$ é chamado de dimensão de $q$ e será denotado por $\dim q$.

Como assumimos que $char(\mathbb{F}) \neq 2$, uma forma quadrática $q$ de dimensão $n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ pode ser vista de forma equivalente como uma função $q : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}$ definida por $q(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, onde $a_{ij} = a_{ji}$. Conforme podemos ver em [1](seção 1 do capítulo 1), essa abordagem nos permite descrever $q$ por uma equação matricial $q = X^t \cdot M_q \cdot X$, sendo $X$ vetor coluna com entradas em $\mathbb{F}$ e $X^t$ um vetor linha, matriz transposta do vetor $X$ e $M_q$ matriz simétrica com entradas $a_{ij} \in \mathbb{F}$.

Aproveitando a notação matricial, podemos estabelecer uma relação de equivalência entre formas quadráticas:

**Definição 3.2.** Dizemos que duas formas quadráticas $q$ e $q'$ são equivalentes se as matrizes simétricas associadas são congruentes no seguinte sentido:

$$\text{existe } G \in GL_n(\mathbb{F}) \text{ tal que } M_q = G^t \cdot M_{q'} \cdot G.$$

Essa relação de equivalência é importante pois com ela podemos simplificar o estudo de formas quadráticas. Um elemento $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ é dito ser **representável** pela forma $q$ se $a$ for elemento da imagem de $q$. Conforme Corolário 1.1.16 em [3], formas quadráticas equivalentes representam os mesmos elementos de $\mathbb{F}$ (têm mesmo conjunto imagem). Mais ainda, cada forma quadrática pode ser diagonalizada, isto é, sua classe de equivalência pode ser representada por uma forma quadrática $q$ cuja matriz associada é diagonal com entradas iguais a elementos representáveis pela (classe de equivalência da) forma associada. Isto é, na equação matricial acima, podemos pôr $M_q$ como matriz diagonal a menos de representante da classe de equivalência da forma $q$.

Uma ideia bem consolidada na literatura da TAFQ (veja, por exemplo, os capítulos 1 em [1] e [2]) é associar classes de formas quadráticas a classes de espaços quadráticos.

**Definição 3.3** (Espaços quadráticos)**.** Definimos por **espaço quadrático** sobre o corpo $\mathbb{F}$ o par $(V, B)$, no qual $V$ é um $\mathbb{F}-$espaço vetorial de dimensão finita e $B$ é uma função bilinear simétrica definida em $V \times V$ com valores em $\mathbb{F}$.

Note que, devido a bilinearidade, $B(v, 0) = 0 = B(0, v)$, para todo $v \in V$.

Com a definição acima, observamos que, para cada escolha de isomorfismo $\mathbb{F}$-linear $i : \mathbb{F}^n \cong V$, onde $n = dim_{\mathbb{F}}(V)$, então a função $q_B : V \longrightarrow \mathbb{F}$ definida por $q_B(x) = B(x, x)$, $x \in V$, determina uma mesma classe de equivalência de formas quadráticas $q_B^{(i)} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}$.

Observamos ainda que, dada uma forma quadrática de dimensão $n$, $q : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}$, podemos definir $B_q(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$ sendo $x, y \in \mathbb{F}^n$. Não é difícil ver que $B_q$ é uma função bilinear simétrica, isto é, $(\mathbb{F}^n, B_q)$ é um espaço quadrático.

Complementando as informações dos parágrafos anteriores, descreveremos a relação entre formas quadráticas e espaços quadráticos. Para tanto, precisaremos do conceito de isometria.

**Definição 3.4.** Dois espaços quadráticos sobre o corpo $\mathbb{F}$, $(V, B)$ e $(W, C)$, são ditos **isométricos** se existe um isomorfismo $\mathbb{F}$-linear $\tau : V \longrightarrow W$ satisfazendo $C(\tau(x), \tau(y)) = B(x, y)$.

Assim, com a definição de isometria no contexto dos espaços quadráticos, temos o seguinte resultado (ver Proposição 1.1.6 em [3]):

**Proposição 3.5.** *O acima definido mapa*

$$(q : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}) \ \mapsto \ (\mathbb{F}^n, B_q)$$

*induz uma correspondência biunívoca entre classes de equivalência de formas quadráticas e classes de isometria de espaços quadráticos.*

Em função disto, denotaremos $q \equiv q'$ para designar, indistintamente, tanto formas quadráticas equivalentes quanto espaços quadráticos isométricos.

A Proposição 3.5 nos permite tratar informações de dois pontos de vista, o que pode ser muito útil no tratamento de problemas. Conforme veremos na próxima seção, algo parecido ocorre para formas hermitianas. Aproveitaremos a relação biunívoca e escreveremos que $(V, q)$ é um espaço quadrático, omitindo a função bilinear sempre que não houver risco de confusão. Também, se $V$ é um espaço vetorial, denotaremos por $V^*$ o espaço dual de $V$.

**Definição 3.6** (Espaço regular)**.** Seja $(V, q)$ um espaço quadrático cuja forma bilinear associada é $B = B_q$, dizemos que $q$ é **regular** se ocorrer uma das seguintes condições (equivalentes) abaixo:

- A matriz associada $M_q$ é não-singular;
- A aplicação $\hat{B} : V \longrightarrow V^*$ que associa a cada $v \in V$ o funcional linear $\hat{B}(v)$ definido por $\hat{B}(v)(x) = B(v, x)$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $V$ e $V^*$;
- A função $B$ é não-degenerada, isto é, $B(x, y) = 0, \forall y \in V$ implica $x = 0$;

Se o espaço quadrático $(V, q)$ for regular então, fazendo uso da Álgebra Linear, obtemos a informação que cada subespaço vetorial $S \subseteq V$ possui um "complemento ortogonal": $S^\perp = \{x \in V : B(x, y) = 0, \forall y \in S\}$ é um subespaço vetorial de $V$ tal que $dim(S) + dim(S^\perp) = dim(V)$. Nesta situação, em particular temos que o complemento ortogonal de $V$, $V^\perp$, é o subespaço trivial $\{0\}$.

Nosso intuito é introduzir operações com formas quadráticas. O primeiro passo para tal, fazendo uso da notação de soma ortogonal, que representaremos por $\perp$ é através da definição a seguir.

**Definição 3.7.** Dados espaços quadráticos $(V, B)$ e $(W, C)$, definimos a **soma ortogonal** $(V, B) \oplus^\perp (W, C) := (V \bigoplus W, B + C)$, na qual a forma $E = B + C$ é definida por $E((v, w), (v', w')) := B(v, v') + C(w, w')$, logo a forma quadrática associada é $q_E = q_B + q_C$. Uma notação alternativa para esta construção é: $(V, B) \perp (W, C)$

Como o espaço vetorial $V \bigoplus W$ é uma soma direta, e $E((v, 0), (0, w)) := B(v, 0) + C(0, w) = 0$, a matriz associada da forma quadrática associada será formada por blocos das matrizes associadas de $q_B$ e $q_C$. Dessa forma, observamos que o espaço soma ortogonal será regular se, e somente se, cada espaço $(V, B)$ e $(W, C)$ for regular. Mais ainda, é fácil verificarmos que a construção de soma ortogonal é compatível com a relação de isometria entre espaços quadráticos.

Conforme mencionamos anteriormente, cada forma quadrática pode ser descrita como uma forma diagonal equivalente via classe de congruência. O conjunto $D(q)$ denotará o conjunto de elementos não nulos que são representantes de $q$. Nesse caso, se $q$ é uma forma quadrática de dimensão $n$, então existe $q'$ tal que $q' \equiv q$ e $q'(x_1, x_2, ..., x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$, com $d_i \in D(q) \cup \{0\}$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Além disso $q$ é regular, se e só se $d_i \neq 0$, para todo $i$. Seguindo as notações de [1], escreveremos apenas $q \equiv < d_1, d_2, ..., d_n >$.

Comparando o parágrafo anterior e a correspondência presente na Proposição 3.5, observamos que sempre é possível encontrar base de um espaço isométrico a $V$ de forma que $q$ seja diagonal. Conforme Corolário 1.1.17 em [3], para cada representante $d$ de $q$, sempre podemos encontrar uma forma quadrática equivalente a $q$ cuja matriz associada possui $d$ na diagonal ou, equivalentemente, $V$ é soma ortogonal de um subespaço não-degenerado (ou regular) na forma quadrática unária $< d >$ e seu complemento ortogonal.

Apesar da simplificação que obtemos do estudo das formas quadráticas recorrendo às classes de congruência, ainda podemos distinguir, dentre as formas regulares, as chamadas formas anisotrópicas.

**Definição 3.8.** Seja $(V, q)$ um espaço quadrático. Se $v \in V \setminus \{0\}$ é um vetor que satisfaz $q(v) = 0$, então dizemos que $v$ é um vetor **isotrópico**, caso contrário, dizemos que $v$ é **anisotrópico**. Se uma forma $q$ possui vetores isotrópicos, dizemos que $q$ é isotrópica, caso contrário, nos referimos a $q$ como anisotrópica.

O resultado a seguir ([3] Teorema 1.1.22) classifica as formas regulares e isotrópicas de dimensão igual a 2.

**Teorema 3.9.** *Seja $(V, q)$ um espaço quadrático de dimensão 2. São equivalentes:*

- *$q$ é regular e isotrópica;*
- *$q$ é isométrico a $< 1, -1 >$.*

A distinção entre formas isotrópicas e anisotrópicas se faz relevante principalmente no que diz respeito aos representantes. Formas isotrópicas são *universais*, no sentido de que representam todos os elementos não nulos do corpo. De modo geral, $< a, a > \equiv < 1, -1 >$ para todo $a \in \mathbb{F}$ não-nulo.

O espaço quadrático de dimensão 2 descrito no Teorema 3.9 também é conhecido como **plano hiperbólico** e será denotado por $\mathbb{H}$. Espaços quadráticos isométricos a somas ortogonais de planos hiperbólicos são chamados genericamente de espaços hiperbólicos: estes sempre são regulares e têm dimensão par. Conforme acompanhamos no Teorema 1.1.24 [3], cada espaço regular isotrópico possui pelo menos uma cópia isomorfa ao plano hiperbólico como subespaço.

Com as distinções dos tipos de formas regulares, estamos motivados para o seguinte teorema:

**Teorema 3.10** (Decomposição de Witt)**.** *Dado um espaço quadrático* $(V, q)$*, existe decomposição de* $(V, q)$ *como soma ortogonal de subespaços quadráticos*

$$(V, q) \equiv (V_a, q_a) \perp (V_h, q_h) \perp (V_0, q_0)$$

*na qual a componente* $q_a$ *é anisotrópica,* $q_h$ *é hiperbólica e* $q_0$ *é totalmente isotrópica (i.e., é a forma nula). Além disso, a decomposição acima é única a menos de isometria.*

A soma ortogonal ainda possui a propriedade de cancelamento. Para simplificar a notação, escreveremos apenas $q \perp q'$ para denotar a soma ortogonal de duas formas quadráticas.

**Teorema 3.11** (Cancelamento de Witt)**.** *Sejam* $q, q_1$ *e* $q_2$ *formas quadráticas. Se* $q \perp q_1 \equiv q \perp q_2$*, então* $q_1 \equiv q_2$.

## 3.2. Introduzindo o anel de Witt

A Lei de Cancelamento de Witt nada mais é do que uma ”Lei do Corte”para a soma ortogonal de formas quadráticas. Deste modo, dado um corpo $\mathbb{F}$, podemos pensar no conjunto $M(\mathbb{F})$ de todas as classes de equivalência de formas quadráticas sobre $\mathbb{F}$. A soma ortogonal possibilita definir uma estrutura aditiva comutativa a $M(\mathbb{F})$ com cancelamento de parcelas similar ao monóide aditivo $\mathbb{N}$.

A multiplicação que definiremos será a partir do *produto de Kronecker*.

**Definição 3.12.** Sejam $(V, B)$ e $(W, C)$ espaços quadráticos sobre um corpo $\mathbb{F}$. O espaço produto $(V', B')$ é dado por $V' = V \bigotimes W$ cuja única forma bilinear simétrica $B' : V' \times V' \longrightarrow \mathbb{F}$ satisfaz $B'(v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2) = B(v_1, v_2) \cdot C(w_1, w_2)$.

O produto acima definido é compatível com a relação de isometria entre espaços quadáticos e assim induz um produto sobre pares de elementos de $M(\mathbb{F})$. Esta operação binária $\otimes : M(\mathbb{F}) \times M(\mathbb{F}) \longrightarrow M(\mathbb{F})$ é comutativa, associativa e distriu com respeito à soma ortogonal; além disso, seu elemento neutro é representado por $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$. Conforme [3], páginas 13 e 18, vemos que $(M(\mathbb{F}), \perp, \bigotimes, [\{0\}], [F])$ possui estrutura de um semianel comutativo com unidade possuindo lei cancelamento para soma similar ao semianel $\mathbb{N}$.

Definindo a relação de equivalência $(q_1, q_2) \simeq (q_3, q_4)$ se, e somente se, $q_1 \perp q_4 \equiv q_3 \perp q_2$ sobre $M(\mathbb{F}) \times M(\mathbb{F})$, obtemos Groth$(M(\mathbb{F})) = M(\mathbb{F}) \times M(\mathbb{F})/ \simeq$, o qual inclui via imersão $M(\mathbb{F}) \rightarrowtail$ Groth$(M(\mathbb{F}))$ o subconjunto $\{(q, 0) \in$ Groth$(M(\mathbb{F}))\}$ cópia isomorfa de $M(\mathbb{F})$. O produto de Kronecker quando estendido de maneira única a Groth$(M(\mathbb{F}))$ via propriedade universal faz deste um anel comutativo.

**Definição 3.13** (Anel de Witt-Grothendieck)**.** Munido das operações $\perp$ e $\bigotimes$, $\hat{W}(\mathbb{F}) =$ Groth$(M(\mathbb{F}))$ é chamado **anel de Witt-Grothendieck do corpo** $\mathbb{F}$.

Os elementos de $\hat{W}(\mathbb{F})$ são da forma $(q, q')$ e serão denotados por subtrações formais $q - q'$. Observe que a função $\dim : M(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ pode ser estendida de forma única a um homomorfismo de anéis $\dim : \hat{W}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ definido por $\dim(q - q') = \dim(q) - \dim(q')$.

**Definição 3.14.** O núcleo do homomorfismo $\dim : \hat{W}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ é chamado de **ideal fundamental de** $\hat{W}(\mathbb{F})$ e será denotado por $\hat{\mathrm{I}}\mathbb{F}$.

Considere a classe de equivalência da forma hiperbólica $< 1, -1 >\in M(\mathbb{F})$, que será denotada por $\mathbb{H}$. O ideal gerado por $\mathbb{H}$ é o ingrediente restante a fim de definirmos o anel de Witt do corpo $\mathbb{F}$.

**Definição 3.15** (Anel de Witt)**.** Dado um corpo $\mathbb{F}$, seu **anel de Witt** $W(\mathbb{F})$ é definido por $W(\mathbb{F}) = \hat{W}(\mathbb{F})/\mathbb{Z} \cdot \mathbb{H}$.

Observamos que, como $\mathbb{H}$ possui a propriedade de absorção de produtos por formas de dimensão 1, este ideal gerado é simplesmente $\mathbb{Z} \cdot \mathbb{H}$.

Usando o fato de que $(\mathbb{Z} \cdot \mathbb{H}) \cap \hat{\mathrm{I}}\mathbb{F} = \{0\}$, definimos o **ideal fundamental de** $W(\mathbb{F})$, denotado por $\mathrm{I}\mathbb{F}$, como sendo a imagem de $\hat{\mathrm{I}}\mathbb{F}$ pela projeção $\pi : \hat{W}(\mathbb{F}) \longrightarrow W(\mathbb{F})$.

Conforme Proposição 1.3.5 em [3], os elementos de $W(\mathbb{F})$ estão em correspondência biunívoca com as classes de equivalência de formas anisotrópicas sobre $\mathbb{F}$. Mais ainda, duas formas $q$ e $q'$ representam o mesmo elemento no anel de Witt se, e somente se, $q_a \equiv q'_a$, isto é, se, e somente se, suas partes anisotrópicas (das respectivas decomposições de Witt) forem isométricas. Nesse caso, dizemos que as formas $q$ e $q'$ são **Witt-equivalentes** ou **Witt-similares**. Para formas $q$ e $q'$ de mesma dimensão isso significa que $q \equiv q'$.

Os elementos do ideal $\mathrm{I}\mathbb{F}$ são representantes das formas quadráticas anisotrópicas de dimensão par. Este é um ideal primo do anel de Witt. Juntamente com suas potências, descrevem parte da estrutura do anel de Witt, conforme o teorema anunciado a seguir (o leitor que quiser aprofundamento pode consultar [3] em 1.3.12). Denotamos por $\dot{\mathbb{F}}$ o conjunto $\mathbb{F} \setminus \{0\}$.

**Teorema 3.16.** *Uma forma $q$ representa um elemento em $I\mathbb{F} \subseteq W(\mathbb{F})$ se, e somente se, $\dim q$ for par. São válidos:*

- $W(\mathbb{F})/I\mathbb{F} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;
- *(Pfister)* $I\mathbb{F}/I^2\mathbb{F} \cong \dot{\mathbb{F}}/\dot{\mathbb{F}}^2$;
- $W(\mathbb{F})$ *(ou $\hat{W}(\mathbb{F})$) é noetheriano se, e somente se, $\dot{\mathbb{F}}/\dot{\mathbb{F}}^2$ for um grupo multiplicativo finito.*

Por fim, observamos que esta construção paramétrica, $\mathbb{F} \mapsto W(\mathbb{F})$, que associa um anel comutativo com unidade a cada corpo de característica diferente de 2, constitui parte de um funtor. A cada extensão de corpos, $j : \mathbb{F} \rightarrowtail \mathbb{K}$, este funtor associa um homomorfismo de anéis $W(j) : W(\mathbb{F}) \to W(\mathbb{K})$, via "extensão dos escalares de espaços quadráticos". Além disso, $W(j)$ mapeia $\mathrm{I}^n\mathbb{F}$ em $\mathrm{I}^n\mathbb{K}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

### 3.3. Um pouco sobre ordens em corpos

O conceito de ordem em um corpo é fundamental para o desenvolvimento da teoria algébrica de formas quadráticas. Isto se deve inicialmente aos resultados de Artin-Schreier, obtidos na década de 1920, que fornecem a caracterização dos corpos ordenáveis como sendo exatamente os corpos formalmente reais, conceito que pode ser expresso na linguagem das formas quadráticas. Algo mais sofisticado envolve o estabelecimento de (diversas e) estreitas relações entre o anel de Witt do corpo e o espaço de todas as ordens do corpo, tema que tangenciaremos no decorrer do trabalho; outras desenvolvimentos da assim chamada "Álgebra Real" podem ser encontrados em [9].

**Definição 3.17** (Cone positivo)**.** Seja $\mathbb{F}$ um corpo e $P \subseteq \mathbb{F}$ um subconjunto com as seguintes propriedades:

- $P$ é fechado para a soma e produto;
- $P \cap -P = \{0\}$;
- $P \cup -P = \mathbb{F}$.

Tal conjunto $P$ é chamado de **cone positivo** para $\mathbb{F}$.

A ideia é classificar todas as ordens totais no corpo $\mathbb{F}$ (compatíveis com $+$ e $\cdot$) por meio dos cones positivos em $\mathbb{F}$. A relação de ordem associada ao cone positivo $P$ é dada da seguinte maneira:

$$\forall x, y \in \mathbb{F}, \quad x \leq y \iff y - x \in P. \tag{1}$$

Fixado o cone positivo $P$, dizemos que $(F, P)$ é um corpo ordenado com a ordem estabelecida em (1).

A existência de uma ordem em um corpo determina várias consequências. Dentre elas o corpo ser *formalmente real*[1], o cone positivo ser um conjunto que contêm elementos que são as somas de quadrados de elementos do corpo, dentre outros (para mais detalhes veja [3], Proposição 1.4.4). É fácil vermos que os corpos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são ordenáveis por uma única possibilidade de ordenação com, respectivamente, $P = \mathbb{Q}^2$ e $P = \mathbb{R}^2$ e que o corpo $\mathbb{C}$ não é ordenável ($-1 = i^2$, portanto, $\mathbb{C}$ também não é formalmente real).

**Definição 3.18** (Corpo real-fechado)**.** Um corpo $\mathbb{F}$ é dito **real-fechado** se for formalmente real e não possuir extensão algébrica não-trivial que seja formalmente real.

Corpos reais fechados têm uma única ordem, cujo cone positivo é dado pelo conjunto de todos os quadrados do corpo. O exemplo mais notável de corpo real fechado é o corpo dos números reais $\mathbb{R}$. Apesar de $\mathbb{Q}$ possuir uma única ordenação, este corpo não é real fechado (porquê?).

**Definição 3.19** (Fecho real)**.** Seja $(F, P)$ um corpo ordenado. Um corpo $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{F}$, extensão de $\mathbb{F}$, é dito **fecho real** de $\mathbb{F}$ relativo a $P$ se satisfaz as seguintes condições:

- $\mathbb{K}$ é real-fechado;
- $\mathbb{K}$ é extensão algébrica sobre $\mathbb{F}$;
- $P = \mathbb{K}^2 \cap \mathbb{F}$.

A terceira condição na Definição 3.19 significa que a ordem induzida em $\mathbb{F}$ é induzida pela ordem de $\mathbb{K}$. O resultado a respeito do fecho real enunciado a seguir ([3], Teorema 1.4.20) nos permite maior entendimento sobre relações de ordem em um corpo e extensões que são reais fechadas.

**Teorema 3.20.** *Dado $(\mathbb{F}, P)$ corpo ordenado, então existe algum fecho real para $\mathbb{F}$ relativo a $P$. Além disso, os fechos reais de $\mathbb{F}$ relativos a $P$ são todos $\mathbb{F}$-isomorfos.*

A importância de se obter uma extensão que é um corpo real-fechado reside no fato de que corpos reais-fechados são *euclidianos*[2] e por isso possuem anel de Witt isomorfo a $\mathbb{Z}$. Portanto, fixado um corpo $(\mathbb{F}, P)$ ordenado, com ordem $\leq_P$, um fecho real relativo denotado por $\mathbb{F}_{\leq_P}$, a inclusão $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{F}_{\leq_P}$ induz um morfismo entre os anéis de Witt $W(\mathbb{F}) \longrightarrow W(\mathbb{F}_{\leq_P}) \cong \mathbb{Z}$. O morfismo de anel $sgn_P : W(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ resultante da

[1] Um corpo $\mathbb{F}$ é dito formalmente real quando $-1 \in \mathbb{F}$ não puder ser escrito como uma somatória de quadrados em $\mathbb{F}$.

[2] Veja [3] seção 1.4 para mais detalhes.

composição, é denominado **assinatura** (relativa a $P$) e não depende da escolha particular de fecho real de $\mathbb{F}$. Assim, para cada ordem $P$ em $\mathbb{F}$, obtemos uma função assinatura cujo domínio é o anel de Witt de $\mathbb{F}$ e que toma valores em $\mathbb{Z}$. Se denotarmos por $X_{\mathbb{F}}$ o conjunto de todas as ordens de $\mathbb{F}$, obtemos, por propriedade universal, um único homomorfismo de anéis, chamado **assinatura total**, que faz o diagrama a seguir comutar.

$$
\begin{tikzcd}
W(\mathbb{F}) \arrow[rr, "sgn"] \arrow[dr, dashed, "\exists!"'] \arrow[dd] \arrow[ddrr, bend left, "sgn_P"] & & \prod_{\leq P \in X_{\mathbb{F}}} \mathbb{Z} \\
& \prod_{\leq P \in X_{\mathbb{F}}} W(\mathbb{F}_{\leq P}) \arrow[ur, "\cong"'] \arrow[dl, "\pi_P"'] & \\
W(\mathbb{F}_{\leq P}) \arrow[rr, "\cong"'] & & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}
$$

**Figura 1. Assinatura total**

Dessa forma, dada $q \in W(\mathbb{F})$, $sgn(q) = (sgn_P(q))_{\leq P \in X_{\mathbb{F}}}$.

Colocando-se uma topologia adequada (que é, em particular, compacta e Hausdorff) no conjunto $X_{\mathbb{F}}$, denominada *topologia de Harrison*, temos que a imagem do homomorfismo $sgn : W(\mathbb{F}) \longrightarrow \prod_{\leq P \in X_{\mathbb{F}}} \mathbb{Z}$ está contida no subanel de funções contínuas $\mathcal{C}(X_{\mathbb{F}}, \mathbb{Z}) \subseteq \prod_{\leq P \in X_{\mathbb{F}}} \mathbb{Z}$, considerando-se $\mathbb{Z}$ munido da topologia discreta.

Computar o núcleo de $sgn$ nos remete ao *Princípio Local-Global de Pfister*(Teorema 1.5.1 [3]).

**Teorema 3.21** (Princípio Local-Global de Pfister)**.** *Dado um corpo* $\mathbb{F}$*,* $\ker(sgn) = W_t(\mathbb{F})$ *é o subgrupo de torção do grupo de Witt* $W(\mathbb{F})$*. Ainda, elementos em* $W_t(\mathbb{F})$ *são* $2-$*primários.*

### 3.4. Ideais primos em aneis de Witt

Fixemos a notação $Spec(W(\mathbb{F}))$ para o espectro primo de $W(\mathbb{F})$ e diremos que um ideal primo $\mathfrak{p} \subset W(\mathbb{F})$ possui característica $p$ (número primo ou zero) sempre que $char(W(\mathbb{F})/\mathfrak{p}) = p$, em que $char(W(\mathbb{F})/\mathfrak{p})$ denota a característica do domínio de integridade $W(\mathbb{F})/\mathfrak{p}$. Conforme o Teorema 3.16, observamos que $I\mathbb{F}$ é um ideal com característica 2.

Seguindo os passos de [3] em 1.7, determinamos os ideais primos de $W(\mathbb{F})$ usando a *topologia de Zariski do espectro primo de* $W(\mathbb{F})$, buscando uma relação destes com o conjunto $X_{\mathbb{F}}$.

Observe que, dado um corpo ordenado $(\mathbb{F}, P)$, os conjuntos

$$\mathfrak{p}_P = \ker(sgn_P) \quad \text{e} \tag{2}$$

$$\mathfrak{p}_{P,p} = \ker(Q_p \circ sgn_P), \tag{3}$$

sendo $Q_p : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ a aplicação quociente, são ideais primos de $W(\mathbb{F})$. Como $W(\mathbb{F}_{\leq P}) \cong \mathbb{Z}$ os ideais definidos em (2) possuem característica zero e os ideais definidos em (3) possuem característica $p$, sendo $p$ número primo ou zero.

Tomamos uma ordem genérica para $\mathbb{F}$ e obtemos ideais primos do anel de Witt. Observe que essa associação se torna uma função quando consideramos apenas os ideais de característica zero.

Ocorre que, dado um ideal $\mathfrak{p}$ de característica diferente de 2, o conjunto

$$P_{\mathfrak{p}} = \{0\} \cup \{a \in \dot{\mathbb{F}} :< a > \equiv < 1 > (mod\, \mathfrak{p})\} \tag{4}$$

é um cone positivo para $\mathbb{F}$. Dessa forma, $(\mathbb{F}, P_{\mathfrak{p}})$ é um corpo ordenado com ordem ”proveniente”do ideal primo $\mathfrak{p}$. Obtemos uma espécie de ”função inversa”, associando um certo ideal primo de $W(\mathbb{F})$ a uma ordem em $X_{\mathbb{F}}$.

Os parágrafos anteriores nos motivam a enunciar o teorema a seguir, cujos detalhes podem ser encontrados em [1], páginas 277 e 278.

**Teorema 3.22.** *1. $I\mathbb{F} \subseteq W(\mathbb{F})$ é o único ideal de característica 2;*

*2. As funções acima consideradas $P \longmapsto \mathfrak{p}_P$, $\mathfrak{p} \longmapsto P_{\mathfrak{p}}$ estabelecem uma bijeção entre os elementos de $X_{\mathbb{F}}$ e os ideais primos de característica zero de $W(\mathbb{F})$[3];*

*3. $\mathfrak{p}_{P,p} = \mathfrak{p}_{P',p'} \iff P = P' \quad e \quad p = p'$;*

*4. (Harrison) Existem 3 tipos de ideais primos de $W(\mathbb{F})$:*

- *$\mathfrak{p}_P, P \in X_{\mathbb{F}}$ (ideais de característica zero);*
- *$\mathfrak{p}_{P,p}, P \in X_{\mathbb{F}}$ (ideais de característica $p \neq 2$);*

[3] De fato, estas estabelecem um homeomorfismo entre o espaço de ordens $X_{\mathbb{F}}$, munido da *topologia de Harrison*, e o subespaço dos ideais de característica 0 de $Spec(W(\mathbb{F}))$, este munido com a *topologia de Zariski*.

- $I\mathbb{F} = \mathfrak{p}_{P,2}, P \in X_{\mathbb{F}}$ *(único ideal de característica 2).*

O Teorema 3.22 nos remete a (3) e (2), nas quais, oportunamente, acabamos por definir todos os ideais de $W(\mathbb{F})$.

## 4. Elementos da Teoria Algébrica de Formas Hermitianas

Nesta seção introduzimos aspectos gerais da TAFH. Nossos esforços são somados com propostas e resultados trabalhados nas referências [10] e [11] para as definições básicas, conceitos geométricos e introdução do grupo de Witt.

Nos trechos que se seguem existe a nossa tentativa de explicitar que objetos com relevância na TAFH por vezes são generalizações ou adaptações de objetos relevantes na TAFQ. Em particular, veremos que: (i) os conceitos de forma sesquilinear e de forma hermitiana na TAFH são extensões do conceito de forma quadrática na TAFQ; (ii) a TAFH não dispõe, em geral, de aneis de Witt, mas sim de módulos de Witt; (iii) no que diz respeito a caracterização da estrutura algébrica dos módulos de Witt, devemos a [12] a definição e descrição do conceito de $\mathfrak{m}-$ideais, que são de relevância para o estudo da TAFH.

### 4.1. Formas sesquilineares e hermitianas sobre álgebras com involução

Trataremos aqui do conceitos de formas sesquilineares e de formas hermitianas, definidas sobre uma álgebra sobre um corpo base que é associativa, tem unidade e está munida de uma involução. O ponto principal a partir daqui é que a teoria de formas hermitianas a ser desenvolvida tenha significado teórico relevante e se reduza à teoria de formas quadráticas nos casos particulares a serem apresentados, isto é, contenha propriamente a teoria discutida na seção precedente. Sempre que possível, aproveitaremos notações já utilizadas na seção anterior a respeito da TAFQ.

**Definição 4.1** (Involução)**.** Seja $R$ um anel com unidade. Uma **involução** $\sigma$ sobre $R$ é um antiautomorfismo de $R$ com ordem no máximo 2, i.e. é uma função $\sigma : R \longrightarrow R$ satisfazendo as seguintes propriedades:

Dados $a, b \in R$:

- (Preserva constantes) $\sigma(0) = 0, \sigma(1) = 1$;
- (Preserva somas) $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$;
- (Reverte produtos) $\sigma(a \cdot b) = \sigma(b) \cdot \sigma(a)$;
- (Ordem no máximo 2) Existe um valor mínimo $j \in \{1, 2\}$ tal que $\sigma^j(a) = a$.

**Exemplo 4.2.** Uma vez que $\mathbb{F}$ é corpo, portanto, a multiplicação é comutativa e a função identidade

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{F}} : \quad \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ a &\longmapsto id_{\mathbb{F}}(a) = a \end{aligned}$$

é uma involução sobre $\mathbb{F}$.

**Exemplo 4.3.** A conjugação complexa

$$\begin{array}{rrl} \sigma: & \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ & a+bi & \longmapsto \overline{a+bi} = a-bi \end{array}.$$

**Exemplo 4.4.** A conjugação quaterniônica

$$\begin{array}{rrl} \sigma: & \mathcal{H} & \longrightarrow \mathcal{H} \\ & a+bi+ci+dk & \longmapsto \overline{a+bi+cj+dk} = a-bi-cj-dk \end{array}.$$

**Exemplo 4.5.** Seja $(R,\sigma)$ é um anel comutativo com involução, e $n \geq 1$ é um número natural. Temos involução induzida no anel (não comutativo, caso $n \geq 2$) $M_n(R)$:

$$\begin{array}{rrl} \sigma_n^t: & M_n(R) & \longrightarrow M_n(R) \\ & A=(a_{ij}) & \longmapsto \sigma_n^t(A) = (\sigma(a_{ji})) \end{array}.$$

**Exemplo 4.6.** Seja $R$ é um anel comutativo e $G$ um grupo. Então o anel de grupo $R[G]$ pode ser munido naturalmente com uma involução $\sigma : R[G] \longrightarrow R[G]$ para cada função de suporte finito $f : G \to R$, temos

$$\sigma(\sum_{g\in supp(f)} f(g).g) = \sum_{g\in supp(f)} f(g).g^{-1}$$

**Definição 4.7** (Involução sobre uma $R-$álgebra)**.** Seja $A$ uma $R-$álgebra (associativa e com unidade). Dizemos que $\overline{\sigma} : A \longrightarrow A$ é uma **involução sobre a $R-$álgebra** $A$ se $\overline{\sigma}$ satisfaz as propriedades de involução para o anel $A$ e também satisfaz:

- (Ação conjugada) Dados $r \in R$ e $a \in A$, $\overline{\sigma}(r \cdot a) = \sigma(r) \cdot \overline{\sigma}(a)$;

para alguma $\sigma : R \longrightarrow R$ involução sobre $R$.

Quando for conveniente, abusaremos da notação, escrevendo apenas $\sigma$ ao invés de $\overline{\sigma}$ para a involução da respectiva $R-$álgebra.

Se $(R,\sigma)$ é um anel comutativo munido de involução, o Exemplo 4.5 nos fornece exemplos de $R$-álgebras com involução. Conversamente:

**Exemplo 4.8** (O centro de uma álgebra)**.** Considere $Z = Z(A)$ o centro da álgebra $A$ (não necessariamente comutativa) com involução $\sigma$. Então, a restrição de $\sigma$ a $Z$ é uma involução sobre $Z$ e $A$ é uma $Z-$álgebra com involução.

Usaremos $(A,\sigma)$ para denotar que $A$ é uma $\mathbb{F}-$álgebra com involução $\sigma$.

**Definição 4.9** (Morfismo de $\mathbb{F}-$álgebras com involução)**.** Sejam $(A,\sigma_1)$ e $(B,\sigma_2)$ $\mathbb{F}-$álgebras com involução. Um morfismo $\phi : (A,\sigma_1) \longrightarrow (B,\sigma_2)$ é um homomorfismo de $\mathbb{F}-$álgebras $\phi : A \longrightarrow B$ satisfazendo $\sigma_2(\phi(a)) = \phi(\sigma_1(a)), \forall a \in A$.

**Definição 4.10** (Forma sesquilinear)**.** Seja $A$ uma $\mathbb{F}-$álgebra. Dizemos que a função binária, definida sobre o $A-$módulo $M$ à direita,

$$\begin{aligned} s: \quad M \times M &\longrightarrow A \\ (a,b) &\longmapsto s(a,b) \end{aligned}$$

é uma **forma sesquilinear** se satisfaz as seguintes condições:

- (Linearidade com respeito à soma) Sejam $a, b, c \in M$, valem:

$$s(a+b,c) = s(a,c) + s(b,c);$$

$$s(a,b+c) = s(a,b) + s(a,c);$$

- (Linearidade com respeito à ação na 2ª entrada) Dado $r \in A$, temos:

$$s(a, b\cdot r) = s(a,b)\cdot r;$$

- (Linearidade conjugada com respeito à ação na 1ª entrada) Seja ainda $r \in A$, temos:

$$s(a\cdot r, b) = \sigma(r)\cdot s(a,b);$$

Salvo menção contrária, sempre que nos referirmos a um conjunto $M$, este será um $A-$módulo à direita.

**Exemplo 4.11.** Seja $(A,\sigma)$, uma $\mathbb{F}-$álgebra com involução. Então, $s : A \times A \longrightarrow A$, definida por $s(a,b) = \sigma(a)b$, é uma forma sesquilinear.

**Exemplo 4.12.** Seja $(A,\sigma)$ uma $\mathbb{F}-$álgebra com involução e $(M_n(A), \sigma_n^t)$ a $A-$álgebra das matrizes $n\times n$ (veja Exemplo 4.5). Então, $s : M_n(A)\times M_n(A) \longrightarrow A$, definida por $s(x,y) = tr(\sigma_n^t(x)y)$, é uma forma sesquilinear. Em geral, se $\psi : M_n(A) \longrightarrow M_n(A)$ é involução, então $s(x,y) = tr(\psi(x)y)$ é forma sesquilinear.

**Definição 4.13** (Forma $\lambda$-hermitiana)**.** Seja $\lambda \in Z = Z(A)$ um elemento do centro da $\mathbb{F}-$álgebra $A$ satistazendo $\lambda\sigma(\lambda) = 1$ (exemplos: $\lambda \in \{1,-1\}$). Uma função $h : M \times M \longrightarrow A$ é dita ser uma **forma** $\lambda-$**hermitiana** se for uma forma sesquilinear satisfazendo a seguinte equação $h(x,y) = \lambda\sigma(h(y,x)) \quad \forall x,y \in M.$

Com as notações da definição anterior, dada uma forma sesquilinear $h : M \times M \longrightarrow A$, definimos a forma transposta de $h$, também sesquilinear, a função

$$\begin{aligned} h^*: \quad M \times M &\longrightarrow A \\ (x,y) &\longmapsto h^*(x,y) = \sigma(h(y,x)). \end{aligned}$$

Consequentemente, $h$ é $\lambda-$hermitiana se, e somente se, $h = \lambda h^*$.

Uma vez que $\sigma$ é antiautomorfismo de ordem no máximo 2, para cada forma sesquilinear $h$, sempre poderemos definir a transposta $h^*$ e vale $(h^*)^* = h$. Se $h$ for $\lambda-$hermitiana, então

$$h^* = (\lambda h^*)^* \implies h^* = \sigma(\lambda)h \overset{\lambda=\sigma(\lambda)^{-1}}{\implies} h^* \text{ é } \sigma(\lambda) - \text{hermitiana}. \tag{5}$$

O conjunto das formas sesquilineares sobre $M$ será denotado por $Sesq_A(M)$; similarmente, o conjunto das formas $\lambda-$hermitianas sobre $M$ será denotado por $Sesq_A{}^{\lambda}(M)$.

Observamos que, dado $\lambda \in \mathbb{F}$, temos a função

$$\begin{aligned} S_\lambda : \quad Sesq_A(M) &\longrightarrow Sesq_A(M) \\ b &\longmapsto S_\lambda(b) = b + \lambda b^*. \end{aligned}$$

É fácil ver que $S_\lambda$ é linear. Além disso, se $h$ é $\lambda-$hermitiana, então $S_\lambda(h) = 2h$. Se $Sesq_A{}^{\lambda}(M)$ for $\mathbb{F}$-espaço vetorial, então este $h$ é um auto-vetor associado ao autovalor 2 (lembre-se que a característica de $\mathbb{F}$ é diferente de 2).

Usando o *Teorema de isomorfismo*, obtemos

$$Im(S_\lambda) \cong Sesq_A(M)/\ker(S_\lambda). \tag{6}$$

Apesar de $N(A) = \{\lambda \in Z(A) : \lambda.\sigma(\lambda) = 1\}$ ser um subgrupo abeliano do monóide $(A, \cdot, 1)$ que é fechado por opostos (i.e., $\lambda \in N(A) \Rightarrow -\lambda \in N(A)$) e que pode conter propriamente o (subgrupo fechado por opostos) $\{1, -1\}$, o principal interesse está nos casos $\epsilon = \pm 1 \in N(A)$.

Nesta situação particular, uma verificação direta nos permite observar que $Im(S_\epsilon) \subseteq \ker(S_{-\epsilon}) = Sesq_A^{\epsilon}(M)$ para o caso em que $\mathbb{F}$ é um corpo qualquer. Como assumimos que $char(\mathbb{F}) \neq 2$, então a inclusão anterior na verdade é uma igualdade de conjuntos.

Conforme [11] capítulo 7, formas no conjunto $Im(S_\epsilon)$, isto é, formas do tipo $h = b + \epsilon b^*$, são chamadas de **formas pares**. A equação (6) nos mostra que formas pares são definidas a menos de representantes de $\ker(S_\epsilon) = \{k \in Sesq_A(M) \mid k + \epsilon k^* = 0\}$.

A fim de estabelecermos relação com o conteúdo da seção precedente, observamos que se $A$ for uma $\mathbb{F}-$álgebra comutativa, $\sigma = id_A$ e $\epsilon = 1$, a forma $h$ $1-$hermitiana relacionada é simplesmente uma forma simétrica bilinear; caso $\epsilon = -1$, $h$ é antissimétrica.

Complementando o parágrafo anterior temos as definições de *espaço hermitiano* e *isometria* a seguir que lembram, respectivamente, espaço quadrático e isometria para a teoria de formas quadráticas.

No que segue, assumimos que $M$ será um $A-$módulo (à direita) projetivo e finitamente gerado.

**Definição 4.14** (Módulo/espaço $\lambda$-hermitiano)**.** Seja $(A, \sigma)$ uma álgebra com involução e $h \in Sesq_A{}^{\lambda}(M)$. Dizemos então que o par $(M, h)$ é um **módulo $\lambda$-hermitiano** ou **espaço $\lambda$-hermitiano**.

**Definição 4.15** (Isometria de espaços $\lambda$-hermitianos)**.** Sejam $(M_1, h_1)$ e $(M_2, h_2)$ módulos $\lambda-$hermitianos. Um homomorfismo bijetor de $A-$módulos $\phi : M_1 \longrightarrow M_2$ é chamado de **isometria** se, para cada par $(x, y) \in M_1 \times M_1$, vale

$$h_2(\phi(x), \phi(y)) = h_1(x, y).$$

Estamos quase prontos para definir o conceito análogo correspondente ao encontrado na Definição 3.1 (de forma quadrática). Para tanto, considere a categoria aditiva $(\mathcal{M}, *)$, cujos objetos são os $A-$módulos projetivos à direita e os morfismos são homomorfismos de $A-$módulos, associada a um *funtor de dualidade* $*$ tal que, para cada $M$, $M^* = \hom_A(M, A)$ é o $A-$módulo à direita cuja ação é definida por $(f \cdot a)(x) = \sigma(a)f(x)$, para todo $f \in M^*$ e $a \in A$. Tal funtor deve satisfazer $\eta_M^* \circ \eta_{M^*} = id_{M^*}$, em que $\eta = (\eta_M)_M : id \implies **$ é um isomorfismo natural com cada coordenada $\eta_M : M \longrightarrow M^{**}$ definida por $\eta_M(x)(f) = \sigma(f(x))$, $\forall f \in M^*$. É comum dizer que o funtor $*$ adiciona uma *estrutura hermitiana* para a categoria aditiva $\mathcal{M}$ e, neste caso, chamamos $(\mathcal{M}, *)$ de $(A-)$**categoria hermitiana**. O leitor interessado em aprofundamento pode consultar as seções 1 e 2 de [13].

**Definição 4.16.** Seja $(\mathcal{M}, *)$ uma $A$-categoria hermitiana, $\lambda \in Z(A)$ satisfazendo $\lambda\sigma(\lambda) = 1$ e $M \in \mathcal{M}$. Uma **forma parâmetro** é uma função

$$\begin{aligned} \Lambda : \quad \mathcal{M} &\longrightarrow \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \mathrm{Hom}_A(M, M^*) \\ M &\longmapsto \Lambda_M \leq \mathrm{Hom}_A(M, M^*) \end{aligned}$$

onde $\Lambda_M$ é um submódulo de $\mathrm{Hom}_A(M, M^*)$ que se encontra entre outros dois submódulos

$$\Lambda_M^{min} \subseteq \Lambda_M \subseteq \Lambda_M^{max},$$

sendo

$$\Lambda_M^{min} = \{g - \lambda g^* |\, g \in \text{Hom}_A(M, M^*)\}$$

e

$$\Lambda_M^{max} = \{g \in \text{Hom}_A(M, M^*) | g = -\lambda g^*\},$$

e $\forall\, N \in \mathcal{M}$ vale a *invariância dentro do conjunto imagem* da forma parâmetro $\Lambda$ dada por

$$f^* \Lambda_N f \subseteq \Lambda_M, \quad \forall f \in \text{Hom}_A(M, N). \tag{7}$$

Note que $\Lambda_M^{min} \subseteq \Lambda_M^{max}$. A verificação que $\Lambda^{min}$ e $\Lambda^{max}$ satisfazem a condição de coerência acima também é simples. Observe que, $\forall g \in \Lambda_N^{max}, \forall f \in \text{Hom}_A(M, N)$,

$$f^* g f = f^*(-\lambda g^*) f = -\lambda f^* g^* f \implies f^* g f = -\lambda (f^* g f)^* \in \Lambda_M^{max}.$$

Para o caso $\Lambda = \Lambda^{min}$, tome $g = (h - \lambda h^*) \in \Lambda_N^{min}$ e $f \in \text{Hom}_A(M, N)$, então

$$f^*(h - \lambda h^*) f = f^* h f - \lambda f^* h^* f = f^* h f - \lambda (f^* h f)^* \in \Lambda_M^{min}.$$

No caso (que assumimos) em que $char(\mathbb{F}) \neq 2$, vale a igualdade entre esses subconjuntos de $\text{Hom}_A(M, M^*)$ . Para verificar que vale a inclusão inversa, dada $g \in \Lambda_M^{max}$, como $2 \in A^\sigma$ e $char(\mathbb{F}) \neq 2$, podemos escrever $g = \frac{g}{2} - \lambda \left(\frac{g}{2}\right)^* \in \Lambda_M^{min}$. Segue que $\Lambda_M^{min} = \Lambda_M = \Lambda_M^{max}$ e, portanto, $\Lambda^{min} = \Lambda = \Lambda^{max}$ é unicamente determinada.

**Observação 4.17.** Para o caso em que $\lambda = 1$ e $*$ é o operador identidade em $A$, ou seja, no contexto das formas simétricas bilineares, $g \in \Lambda_M^{max}$ se, e somente se, $g = -g^* = -g$, isto é, $g = 0$ ($char(\mathbb{F}) \neq 2$). Segue que a única possibilidade é $\Lambda \equiv 0$.

Conforme vimos em (6), existe uma correspondência biunívoca entre formas pares e formas sesquilineares a menos de representantes do subgrupo $ker(S_\lambda) = \Lambda_M$.
Dado um espaço hermitiano $(M, h)$, considere o espaço dual $M^* = Hom_A(M, A)$ obtido pelo funtor $*$ em $(\mathcal{M}, *)$, conforme explicitado na página anterior. Podemos definir a aplicação adjunta

$$\begin{aligned} \hat{h}: \quad M &\longrightarrow M^* \\ x &\longmapsto \hat{h}(x), \end{aligned}$$

tal que $\hat{h}(x)(y) = h(x, y), \forall x, y \in M$. Segue de $h$ ser sesquilinear que cada $\hat{h}(x)$ é um funcional linear, logo, $\hat{h}$ está bem definida. Mais ainda, esta aplicação é um homomorfismo de $A-$módulos.

A função $\hat{h}$ é chamada de **adjunta** da forma $h$. No contexto de formas quadráticas, o conceito análogo é a função $\hat{B}$ que definimos no segundo item da Definição 3.6. Deste modo, chamaremos também o par $(M, \hat{h})$ de módulo $\lambda$-hermitiano (ou apenas de módulo hermitiano, quando $\lambda$ estiver fixado previamente), sempre que $\hat{h}$ for adjunta de uma forma $h \in Sesq_A^\lambda(M)$. Por simplicidade, denotaremos a adjunta também por $h$ quando for conveniente, como no caso da definição a seguir.

**Definição 4.18.** Uma **forma $\lambda-$quadrática** de dimensão $n$ é uma classe de equivalência de homomorfismo $[h] = h + \Lambda_M \in \mathrm{Hom}_A(M, M^*)/\Lambda_M$, tal que posto$(M) = n \in \mathbb{N}$.

A fim de contextualizar a definição de forma $\lambda-$quadrática com a abordagem da seção 3, conforme a Observação 4.17, concluímos que as formas adjuntas do tipo $\hat{B}$ definidas na Definição 3.6 são um caso particular de forma $1-$quadrática para o qual a forma parâmetro é identicamente nula.

Outra noção da teoria algébrica de formas quadráticas que pode ser trazida para a teoria algébrica de formas hermitianas é a de conjunto de representantes de uma forma.

**Definição 4.19.** Dizemos que $a \in A$ é um **elemento $\lambda-$simétrico** se $\sigma(a) = \lambda a$. Denotaremos por $Sym_\lambda(A, \sigma)$ o conjunto dos elementos $\lambda-$simétricos de $A$. Então, definimos o **conjunto de representantes** de uma forma $\lambda-$hermitiana $h : M \times M \longrightarrow A$ (veja a seção 2 de [14]), com notação análoga ao caso de formas quadráticas, como se segue:

$$D^\lambda_{(A,\sigma)}(h) := \{u \in Sym_\lambda(A, \sigma) |\ \exists x \in M; h(x, x) = u\}. \tag{8}$$

Se $\lambda = 1$, então simplificamos as notações para apenas: $Sym(A, \sigma)$ e $D_{(A,\sigma)}(h)$.

### 4.2. Regularidade e isotropia de formas hermitianas

Na Definição 3.6 tratamos de estabelecer o que é um espaço quadrático regular e, no referido contexto, demos três distintas (e equivalentes) definições, cada uma trazendo um aspecto relevante, seja este a representação matricial, a relação com a dualidade ou o aspecto geométrico da regularidade. Dando continuidade ao disposto na subseção anterior, por hora, daremos ênfase à relação entre regularidade e dualidade, conforme dispomos a seguir.

**Definição 4.20** (Forma/espaço regular)**.** Dizemos que um espaço $\lambda-$hermitiano $(M, h)$ é **espaço regular** e a forma $h$ é **regular (não-singular)** se a aplicação adjunta $\hat{h} : M \longrightarrow M^*$ for um isomorfismo.

Os conceitos de subespaço e o estudo do comportamento das restrições das formas hermitianas nestas subestruturas no que diz respeito à *regularidade, complemento ortogonal, isotropia* e definição de espaço hiperbólico estão compilados a seguir.

**Definição 4.21** (Subespaço hermitiano)**.** Seja $M' \subseteq M$ um submódulo que seja também projetivo e finitamente gerado. Se $(M, h)$ é um espaço $\lambda-$hermitiano, dizemos que

$\left(M', h\big|_{M'}\right)$ é um **subespaço hermitiano**. A forma $h\big|_{M'}$ é a restrição de $h$ ao submódulo $M'$.

O teorema a seguir (veja [10] lemas 3.6.1 e 3.6.2) também é válido no contexto de formas quadráticas (pode ser generalizado neste contexto).

**Teorema 4.22.** *Seja $(M, h)$ um espaço $\lambda-$hermitiano. Se $\left(N, h\big|_N\right)$ é um subespaço hermitiano regular de $(M, h)$, então $N$ admite complemento ortogonal, isto é, $N^\perp = \{x \in M : h(x, y) = 0, \forall y \in N\}$ é um submódulo de $M$ tal que $M = N \oplus^\perp N^\perp$ (veja que isto já implica que $N, N^\perp$ são módulos projetivos e finitamente gerados).*

Com as notações anteriores, considere o espaço $\lambda-$hermitiano $\mathbb{H}(M) := (M \bigoplus M^*, \tilde{h}_M)$, no qual

$$\begin{aligned} \tilde{h}_M : \quad M \bigoplus M^* \times M \bigoplus M^* &\longrightarrow A \\ ((x, f), (y, g)) &\longmapsto \tilde{h}_M((x, f), (y, g)) = fy + \lambda\sigma(gx). \end{aligned}$$

O termo $fy$ é a imagem do funcional $f$ quando avaliado em $y$. Observe que tanto $M$ quanto $M^*$ são $A-$módulos projetivos de posto finito, assim como a soma direta $\mathbb{H}(M)$. A forma $\tilde{h}_M$ é $\lambda-$hermitiana. Além disso, vale a proposição a seguinte.

**Proposição 4.23.** *$\mathbb{H}(M) := (M \bigoplus M^*, \tilde{h}_M)$ é um espaço $\lambda-$hermitiano regular, isto é, $(M \bigoplus M^*)^\perp = \{0\}$.*

**Definição 4.24.** Seguindo a mesma notação da Proposição 4.23, $(M \bigoplus M^*, \tilde{h}_M)$ é chamado **espaço $\lambda-$hiperbólico**.

Considere o caso em que $A = \mathbb{F}$, $\sigma = id$, $\lambda = -1$, $posto(M) = dim(M) = 1$. Sejam $x \in M \setminus \{0\}$ e $f \in M^*$ um funcional linear satisfazendo $fx \neq 0$. Observe que $(x, f) \neq (0, 0)$ e $\tilde{h}_M((x, f), (x, f)) = 0$, isto é, $(x, f)$ é um vetor isotrópico no respectivo espaço hiperbólico com $dim(M \oplus M^*) = 2$. Então este exemplo é o plano hiperbólico $\mathbb{H}$ do Teorema 3.9.

De modo análogo, definimos espaços hermitianos anisotrópicos, isotrópicos e totalmente isotrópicos. Para o estudo da TAFH, são considerados também os *espaços metabólicos*, dos quais não trataremos neste artigo.

**Exemplo 4.25.** Considere a álgebra real $\mathcal{H}$ dos quatérnions cuja base é $\{1, i, j, k\}$ e a conjugação quaterniônica $\sigma(x) = \bar{x}$ definida no Exemplo 4.4, para todo $x \in \mathcal{H}$. Definimos a *função traço* **Tr** $: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ por $\mathbf{Tr}(x) = x + \bar{x}$, e identificamos $\mathcal{H}$ como espaço vetorial complexo (à direita) da seguinte forma, $\forall v \in \mathcal{H}$:

$$v = a + bi + cj + dk \implies v = (a + bi) + j(c - di) \in \mathcal{H}.$$

Escrevendo $a + bi = v_1$ e $c - di = v_2$, números complexos, definimos sobre o $(\mathbb{R}, \sigma_{|\mathbb{R}})-$módulo $\mathcal{H}$ a forma sesquilinear $h : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(v, w) = \frac{1}{2}\mathbf{Tr}(\bar{v_1}w_1 + \bar{v_2}w_2)$ é $1-$hermitiana.

Sendo $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, a conjugação quaterniônica nesses elementos coincide com a conjugação complexa. É fácil ver que $h$ satisfaz as condições de linearidade e, como $\mathbb{R} = \mathbb{C}^\sigma$, $h$ satisfaz as condições de sesquilinearidade para a ação de $\mathbb{R}$ sobre $\mathcal{H}$. Do fato de ser $\sigma_{|\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}}$, segue que $h$ é $1-$hermitiana. O leitor interessado em mais detalhes sobre álgebras quaterniônicas pode consultar o capítulo 3 de [1]. Mais geralmente, observamos que $h(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma(x_i)a_{ij}y_j$, com $x, y \in A^n$ e $a_{ij} \in A$, é uma forma sesquilinear. Note que, se $h$ é $\lambda-$hermitiana, $a_{ij} \in Sym^\lambda(A, \sigma)$, com $a_{kk}$ representante de $h$ para todo $i, j, k \in \{1, 2, ..., n\}$.

*Assumimos agora, e até o final desta subseção, que $A$ é álgebra com divisão.*

De acordo com [15], seção 2.2, assim como nas formas quadráticas, é possível fazer mudança de base em $A^n$ a fim de que, se $(A^n, h)$ é um espaço $\lambda-$hermitiano, então $h(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i)a_iy_i$ é diagonal. Nesse caso, denotamos $h =< a_1, a_2, ..., a_n >_\sigma$ forma $\lambda-$hermitiana diagonal de forma similar à notação utilizada para formas quadráticas. Este resultado também é formalizado na proposição seguinte devido a [10], Capítulo 1, Lema 6.2.1 e Corolário 6.2.2.

**Proposição 4.26.**
1. *Todo espaço $\lambda-$hermitiano sobre $A$ possui base ortogonal;*
2. *Todo espaço $\lambda-$hermitiano $(M, h)$ é isométrico a uma soma ortogonal $\perp_i$ $(M_i, h_i)$, sendo $\dim_{\mathbb{F}} M_i \leq 2$.*

O teorema a seguir é útil para descrever o grupo de Witt no contexto de formas hermitianas (veja [10], Capítulo 1, Teorema 6.3.4).

**Teorema 4.27** (Cancelamento de Witt)**.** *Vale a lei de Cancelamento de Witt (veja 3.11) para espaços $\lambda-$hermitianos.*

### 4.3. Introduzindo o módulo de Witt para $(A, \sigma)$ e suas assinaturas

Tendo definida a soma ortogonal de formas hermitianas, resta-nos analisar o produto para enfim definirmos o módulo de Witt para uma álgebra com involução.

Conforme [10], capítulo 1, seção 8, dados dois $A$-bimódulos munidos de formas sesquilineares $(M, h)$ e $(M', h')$, o produto tensorial $(M \otimes_A M', h' * h)$ fica munido de uma forma sesquilinear $h' * h$, definida de forma única por

$$h' * h(x \otimes x', y \otimes y') = h'(x', h(x, y)y'), \quad x, y \in M, x', y' \in N. \tag{9}$$

Caso $A$ seja comutativa e $\sigma = id_A$, vale $h' * h = h * h'$ e $h' * h(x \otimes x', y \otimes y') = h'(x', y').h(x, y)$.

Mais alguns resultados sobre este produto são enunciados na proposição abaixo (veja [10], Lema 8.1.1 na página 48).

**Proposição 4.28.**

1. *O produto de formas sesquilineares é distributivo com respeito à soma ortogonal;*
2. *O produto é associativo;*
3. *O produto de uma forma $\lambda-$hermitiana com uma forma $\lambda'-$hermitiana é uma forma $\lambda\lambda'-$hermitiana.*

Para simplificar a notação, denotaremos $\otimes_A$ por $\otimes$.

A construção do grupo de Witt de formas hermitianas sobre a álgebra com involução $(A, \sigma)$ segue de modo análogo ao que foi feito para formas bilineares sobre um corpo $\mathbb{F}$. Tomamos o monóide formado pelas classes de isometria dos espaços $\lambda$-hermitianos regulares; em seguida é feita a construção de grupo de Grothendieck associado e, finalmente, as classes de isometria de formas hiperbólicas são identificada com o elemento zero, obtendo-se o grupo abeliano $W_\lambda(A, \sigma)$. Ademais, se $f : (A, \sigma) \to (A', \sigma')$ é um homomorfismo de álgebras com involução, tem-se induzido um homomorfismo de grupos, $W(f) : W_\lambda(A, \sigma) \to W_{f(\lambda)}(A', \sigma')$, e esta associação é funtorial (em um sentido apropriado).

No que segue, e até o final deste trabalho, adotaremos o contexto adotado por Astier-Unger, e desenvolvido nos últimos dez anos, que tem-se mostrado em bom equilíbrio entre generalidade e profundidade de resultados. Neste, $(A, \sigma)$ é uma álgebra com involução sobre o corpo $\mathbb{F}$ de tal forma que, entre outras condições técnicas, destacamos: (i) $\sigma_{|\mathbb{F}} = id_{\mathbb{F}}$; (ii) $dim_{\mathbb{F}}(A) < \infty$; (iii) $A$ é simples com centro $Z(A)$ um corpo; (iv) $\mathbb{F} = Z(A) \cap Sym(A, \sigma)$ (logo $dim_{\mathbb{F}}(Z(A)) \leq 2$).

Observamos que, por construção, $W(\mathbb{F}) \hookrightarrow W_\epsilon(A, \sigma)$, $\epsilon = \pm 1$. Com a ação induzida pelo produto de formas hermitianas definido acima, $W_\epsilon(A, \sigma)$ se torna um $W(\mathbb{F})-$módulo. Motivados pelo resultado técnico descrito no Lema 2.1 em [15], fixamos doravante o caso $\epsilon = 1$ e denotamos $W_\epsilon(A, \sigma)$ simplesmente por $W(A, \sigma)$.

O leitor deve se lembrar que definimos ordem na seção anterior e discutimos sobre o conjunto das ordens de um corpo $\mathbb{F}$. Como estamos considerando uma álgebra com involução, utilizaremos o fecho real do corpo base $\mathbb{F}$ para a construção da função ”assinatura”no contexto hermitiano. Seguindo o mesmo raciocínio encontrado em [16], fixada uma ordem $\leq_P \in X_{\mathbb{F}}$ para o corpo $\mathbb{F}$, enunciamos a seguinte sequência

$$W(A,\sigma) \longrightarrow W(A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}_{\leq_P}, \sigma \otimes id_{\mathbb{F}}) \longrightarrow \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Para a construção de (10), em [16], foi utilizada *equivalência de Morita*. Inicialmente observa-se que o morfismo da sequência acima independe da escolha do fecho $\mathbb{F}_P$ mas pode ter o sinal trocado a depender da equivalência de Morita escolhida. Para sanar este problema, ainda em [16], Teorema 2, percebemos a existência de um elemento $H \in W(A,\sigma)$ cuja imagem pelo morfismo em (10) é diferente de zero pra qualquer ordem cuja função assinatura não seja identicamente nula. Com este elemento $H$, monta-se a $H-$assinatura, denotada por ${sgn_P}^H$, onde

$${sgn_P}^H(g) = \frac{sgn_P(H)}{|sgn_P(H)|}.sgn_P(g), g \in W(A,\sigma),$$

cujas propriedades são enunciadas no teorema a seguir ([12], Teorema 2.6):

**Teorema 4.29.** *1. A imagem de uma forma hiperbólica por ${sgn_P}^H$ é nula;*

2. *${sgn_P}^H$ é homomorfismo do grupo de Witt $W(A,\sigma)$ em $\mathbb{Z}$;*
3. *Vale ${sgn_P}^H(q \cdot h) = sgn_P(q) \cdot {sgn_P}^H(h)$ para $h \in W(A,\sigma)$ e $q \in W(\mathbb{F})$;*
4. *A função de assinatura total induzida $sgn^H : W(A,\sigma) \to Func(X_{\mathbb{F}},\mathbb{Z})$, $g \mapsto (P \mapsto sgn_P^H(g))$ se fatora pela inclusão $\mathcal{C}(X_{\mathbb{F}},\mathbb{Z}) \hookrightarrow Func(X_{\mathbb{F}},\mathbb{Z})$;*
5. *(Princípio Local-Global de Pfister) Dado $h \in W(A,\sigma)$, $h$ é uma forma hermitiana de torção se, e somente se, ${sgn_P}^H(h) = 0, \forall P \in X_{\mathbb{F}}$.*

Outros desenvolvimentos da teoria das assinaturas e também dos *cones positivos* no contexto hermitiano ([14], [17], [18], [19]) datam de menos de cinco anos, evidenciando a atualidade (e dificuldade) da teoria algébrica de formas hermitianas. Comentário análogo também se aplica ao conteúdo da próxima subseção.

### 4.4. $\mathfrak{m}-$ideais em $W(A,\sigma)$

A classificação dos ideais primos de $W(\mathbb{F})$ se deve a Harrison, conforme enunciamos no Teorema 3.22. No desenvolvimento da teoria de formas quadráticas calculamos o núcleo de certas assinaturas e funções compostas de assinaturas com projeções. Os referidos núcleos nos forneceram *todos os ideais primos* de $W(\mathbb{F})$.

Observando o item 3 do Teorema 4.29, procuramos por $W(\mathbb{F})-$submódulos de $W(A,\sigma)$ que satisfaçam propriedades análogas às referidas no parágrafo anterior. Todo o contexto desta subseção apoia-se no que foi estabelecido em [12].

**Definição 4.30.** ($\mathfrak{m}-$ideais) Seja $(A,\sigma)$ uma $\mathbb{F}-$álgebra com involução e $W(A,\sigma)$ o seu grupo de Witt, visto como um $W(\mathbb{F})-$módulo. Um $\mathfrak{m}-$ideal é um par $(I,N)$ no qual $I \subseteq W(\mathbb{F})$ é um ideal, $N \subseteq W(A,\sigma)$ é um submódulo, e satisfaz $I \cdot W(A,\sigma) \subseteq N$.

Um $\mathfrak{m}-$ideal $(I,N)$ de $W(A,\sigma)$ é dito **primo** se $I \subsetneq W(\mathbb{F})$ for um ideal primo próprio, $N \subsetneq W(A,\sigma)$ for um submódulo próprio e, dados $q \in W(\mathbb{F})$ e $h \in W(A,\sigma)$, vale

$$q \cdot h \in N \implies q \in I \quad \text{ou} \quad h \in N. \tag{11}$$

Em [12], seção 5, observamos que a motivação para a Definição 4.30 são as propriedades a seguir, as quais são satisfeitas pelos $\mathfrak{m}-$ideais:

- $\ker(sgn_P) \cdot W(A,\sigma) \subseteq \ker(sgn_P{}^H)$;
- $W(\mathbb{F}) \cdot \ker(sgn_P{}^H) \subseteq \ker(sgn_P{}^H)$;
- $\forall q \in W(\mathbb{F})$ e $\forall h \in W(A,\sigma)$, se $q \cdot h \in \ker(sgn_P{}^H)$, então $q \in \ker(sgn_P)$ ou $h \in \ker(sgn_P{}^H)$.

De acordo com a Definição 4.30, observando o item 3 do Teorema 4.29, podemos verificar que, para uma ordem $\leq_P$ de $\mathbb{F}$ com assinatura não identicamente nula, $(\ker(sgn_P), \ker(sgn_P{}^H))$ é um $\mathfrak{m}-$ideal primo de $W(A,\sigma)$. Em geral, conforme Lema 6.3 em [12], se $N \neq W(A,\sigma)$ e $I = \ker(\pi_p \circ sgn_P)$, para algum $p$ primo, $\leq_P \in X_{\mathbb{F}}$, então $(I,N)$ é primo.

Ainda em [12], Proposição 6.5, seguimos estudando o quanto os ideais primos de $W(\mathbb{F})$ condicionam os $\mathfrak{m}-$ideais de $W(A,\sigma)$. O próximo teorema estabelece uma associação entre $\mathfrak{m}-$ideais $(I,N)$, $I \neq I\mathbb{F}$, e a existência de ordens para o corpo $\mathbb{F}$ (quase inversa em relação à associação feita no parágrafo anterior). Enunciamos na segunda parte o resultado para o caso em que $I = I\mathbb{F}$ é o ideal fundamental de $W(\mathbb{F})$.

**Teorema 4.31.**
1. *Seja $(I,N)$ um $\mathfrak{m}-$ideal primo do $W(\mathbb{F})-$módulo $W(A,\sigma)$ tal que $I \neq I\mathbb{F}$. Uma das afirmações a seguir é verificada:*
   - *existe $\leq_P \in X_{\mathbb{F}}$ tal que $(I,N) = (\ker(sgn_P), \ker(sgn_P{}^H))$;*
   - *existe $\leq_P \in X_{\mathbb{F}}$ e $p > 2$ número primo tais que* $(I,N) = (\ker(\pi_p \circ sgn_P), \ker(\pi \circ sgn_P{}^H)) =$ $(p \cdot W(\mathbb{F}) + \ker(sgn_P), p \cdot W(A,\sigma) + \ker(sgn_P{}^H))$.
2. *Caso $I = I\mathbb{F}$ então $(I,N)$ é $\mathfrak{m}-$ideal primo se, e somente se, $N$ é submódulo próprio de $W(A,\sigma)$ satisfazendo $I\mathbb{F} \cdot W(A,\sigma) \subseteq N$.*

O Teorema 4.31 caracteriza $\mathfrak{m}-$ideais cujo ideal $I$ difere do ideal fundamental $I\mathbb{F}$, nos dando um caminho para encontrar tais objetos. Na segunda parte do mesmo teorema apresentamos um critério para saber se $(\mathbb{IF}, N)$ é um $\mathfrak{m}-$ideal de $W(A,\sigma)$, a saber, basta verificar se $N$ contem a imagem da ação de $\mathbb{IF}$ em $W(A,\sigma)$. Isto é, a princípio, em contraste com o caso de formas quadráticas, podemos ter mais de um $\mathfrak{m}-$ideal $(\mathbb{IF}, N)$ associado ao ideal fundamental $\mathbb{IF}$.

## Referências


[1] Lam TY. Introduction to quadratic forms over fields. vol. 67 of Graduate Studies in Mathematics. 1st ed. American Mathematical Society; 2005.

[2] Santos DF. Elementos da teoria algébrica de formas quadráticas e de seus aneis graduados; 2015.

[3] Roberto KMA. Multi-anéis e a Câmara Secreta: relações funtoriais entre teorias abstratas de Formas Quadráticas; 2019.

[4] Pfister A. Multiplikative Quadratische Formen. Archiv der Mathematik. 1965;16(1):363-70.

[5] Milnor J. Algebraic K-theory and quadratic forms. Inventiones Mathematicae. 1970;9(4):318-44.

[6] Lam TY. Orderings, valuations and quadratic forms. vol. 52 of Regional Conference Series in Mathematics. 1st ed. American Mathematical Society; 1983.

[7] Mariano HL, Ribeiro HRO, Roberto KMA. Uma jornada pelas teorias algébricas de formas quadráticas. 1st ed. Livraria da Física-LF; 2021.

[8] Witt E. Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1937;176(1):31-44.

[9] Lam TY. Ten Lectures on Quadratic Forms over Fields. Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics. 1977;46(1):1-102.

[10] Knus MA. Quadratic and Hermitian forms over rings. vol. 294 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. 1st ed. Springer-Verlag; 1991.

[11] Scharlau W. Quadratic and Hermitian forms. vol. 270 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. 1st ed. Springer-Verlag; 1985.

[12] Astier V, Unger T. Signatures of hermitian forms and ”prime ideals”of Witt groups. Advances in Mathematics. 2015;285(1):497-514.

[13] Bayer-Fluckiger E, Moldovan DA. Sesquilinear forms over rings with involution. Journal of Pure and Applied Algebra. 2014;218(1):417-23.

[14] Astier V, Unger T. Signatures of hermitian forms, positivity, and an answer to a question of Procesi and Schacher. Journal of Algebra. 2018;508(1):339-63.

[15] Astier V, Unger T. Signatures of hermitian forms and the Knebusch trace formula. Advances in Mathematics. 2014;358(1):925-47.

[16] Astier V, Unger T. Signatures of hermitian forms and applications(preprint version). Oberwolfach Reports. 2013;31(1):1-3.

[17] Astier V, Unger T. Signatures, sums of hermitian squares and positive cones on algebras with involution. Electronic Research Announcements in Mathematical Sciences. 2018;28(1):16-26.

[18] Astier V, Unger T. Positive cones on algebras with involution. Advances in Mathematics. 2020;361(1):106954.

[19] Astier V, Unger T. Positive Cones and Gauges on Algebras With Involution. International Mathematics Research Notices. 2022;2022(10):7259-303.